

らくらく相対論入門 その1

—擬ニュートンポテンシャルの特徴—

福江 純

〈〒582-8582 柏原市旭ヶ丘 4-698-1 大阪教育大学教育学部〉

e-mail: fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

ニュートンの重力ポテンシャルを少し変形した“擬ニュートンポテンシャル”は、ブラックホール周辺の相対論的現象をうまく模倣する強力な道具として重宝されている。これを使えば高校生でも相対論的現象の計算ができるだろう。そこで、擬ニュートンポテンシャルの性質や妥当性、さらにより洗練された使い方をするための補正などを、最近の研究をもとにまとめてみることにした。今回は、擬ニュートンポテンシャルの性質を簡単に紹介し、厳密な相対論で得られる結果との比較を行い、また出自の妥当性について議論しよう。擬ニュートンポテンシャルの弱点やその改善方法については、次回で紹介する。

1. はじめに

2004年に大学が法人化され、いろいろな職務が重なって、大好きな（笑）研究があまりできなかったのだが、そんな中で少しできたのが擬ニュートンポテンシャルに対する補正の提案だった。『天文月報』にはしばらく記事を書いていなかったし、久しぶりに最近の研究として紹介（今回の記事に相当する部分）しようかと夏前頃には漠然と思っていたのだが、その前に擬ニュートンポテンシャル自体の紹介（今回の記事に相当する部分）をするつもりになったのには二つ理由がある。

1.1 シニア向け動機

次回で紹介する予定の、擬ニュートンポテンシャルに対する補正の提案をした論文をPASJ誌に投稿したとき、速度に関する補正を提案した論文は外国人レフリーのもとでサクッと通ったのだが、音速に関する補正を提案した論文は日本人レフリーに回ってやや揉めた。揉めたというか、擬ニュートンポテンシャルは重力ポテンシャルを

“適当に変形”したもののなので、その改良をしても無意味であり、一般相対論的に厳密な取り扱いをすべきだ、という主理由でリジェクトされたのである。これはあんまりなので、かなり強く抗議し、編集部の意見を考慮して論文を修正し、他のレフリーのもとで受理されたのだが、このことには少し考えさせられた。

というのは、擬ニュートンポテンシャルは決して“適当なもの”ではなく、後で述べるように、厳密な相対論の式を展開した形になっていて、 a/r (a はシュバルツシルト半径)の1次の精度まで正しい。しかしこのことは、オリジナルな論文にも書かれていないし、相対論の専門家はもちろん、擬ニュートンポテンシャルを（何となく）使っているかもしれない人たちにとっても、十分に理解されていないのではあるまいか。実際、私自身、十数年前に擬ニュートンポテンシャルを初めて使い始めた頃はなかなか不安だった。結局、自分自身でその導出を行い、正統性を確かめたものだ¹⁾。だから、そのような作業をしていなければ、擬ニュートンポテンシャルに対する不安ないしは

信頼性の欠如は理解できる。

もう一つは、相対論原理主義の立場からすれば、相対論的に厳密にできる計算は相対論を用いるべし、というのも正論ではあるし、理解できないわけではない。が、いくら相対論の部分厳密にしても、天文学的な現象では、それ以外の部分で曖昧さが残ることも多く、最終的な精度は落ちてしまうので、労力は報われない。だからそれなりに精度がある近似法であれば、上手に利用するというのも現実的な立場かと思う。いずれにせよ、ニュートン力学よりはるかによい理論であるとはいえ、相対論もあくまでも自然界を近似した理論の一つにすぎないのだから。

1.2 ジュニア向け動機

といったことを暑い時期につらつら思っていたら、涼しくなったころ、年会ジュニアセッション担当の吉川 真さんから、2005年春季年会のジュニアセッションについて少し相談を受けることがあった。2005年は特殊相対論が誕生してから100年目にあたり、世界物理年として物理学界ではいろいろな行事が企画されている。ジュニアセッションでも相対論がらみの何かができないだろうかという相談だった。これにもまた考えさせられた。

私自身、相対論に関する解説書は、小学生向け、中学生向け、高校一般向けにそれぞれ書いた経験があり、また奇しくも相対論誕生の100年目に向けた本も執筆中で、相対論の面白さ自体は、中高生はもちろん小学生でもわかるだろうと思っている。しかし、相対論にかかわる実際の計算は、大学ぐらいできっちり物理をやらんとダメだろうなあ、と漠然と思っていた。

しかし、よくよく考えてみれば、“擬ニュートンポテンシャル”という便利なものがあるじゃないか。擬ニュートンポテンシャルはニュートンの重力ポテンシャルを少し変形するだけだ。ならば高校生でも物理を習っていれば、擬ニュートンポテンシャルを使うことによって、相対論的計算の醍

醐味が味わえるんじゃないだろうか。

これは喧伝する価値がありそうだ。でも、だとすると、はよ書かんなあかんあ、ああ、なんでそんなときに限ってタイミングよく10月の3連休なんだ。自分で自分の首を絞めることになったけど、その結果できた本稿が、シニアの人にもジュニアの人にも役に立てば幸いである。

以下、2節では擬ニュートンポテンシャルについて簡単に紹介し、3節でニュートンの場合や一般相対論の場合と比較しながら擬ニュートンポテンシャルの性質をまとめる。4節では厳密な一般相対論との関係を導いておく。

2. 擬ニュートンポテンシャルとは

質量 M の天体の擬ニュートンポテンシャルは、その天体のシュバルツシルト半径を a ($=2GM/c^2$) として、

$$\phi_{\text{PN}} = -GM/(r-a) \quad (1)$$

で表される (G は万有引力定数、 c は光速)。ニュートンの重力ポテンシャルで分母に r がくるところを、 $(r-a)$ で置き換えただけである。英語では pseudo-Newtonian potential (シュード・ニュートニアン・ポテンシャル) と呼ぶが、pseudo (シュード; 偽, 擬, 似, 仮) という接頭語がついているのは、ニュートンに似ていて非なるものというぐらいの意味である。

この擬ニュートンポテンシャルは、球対称のシュバルツシルト・ブラックホールの時空 (シュバルツシルト時空) を模倣する道具として、パチンスキーという天体物理学者がウィータとともに、1980年初めて提案したものだ²⁾。そして、その後、4半世紀、天文の業界ではブラックホール降着流などの分野で非常に重宝されてきている。

なお、今回は取り扱わないが、自転しているカー・ブラックホールの時空 (カー時空) を模倣する擬ニュートンポテンシャルも提案されている (例えば参考文献3)。

【効能】 擬ニュートンポテンシャルは、球対称なシュバルツシルト時空の力学的性質を、かなりよく模倣できる。

【弱点】 ただし、シュバルツシルト半径に近づくと精度が急激に悪化する。

【適用範囲】 空間はあくまで平坦なので、曲がった時空における光線の彎曲は、取り扱い対象外である。

【記号】 本稿では、ポテンシャルを表す記号としては、ギリシャ文字の ϕ (プサイ; 小文字) や Ψ (プサイ; 大文字) を使う。添え字の **N** はニュートン、**PN** は擬ニュートン、そして **GR** は一般相対論の量であることを示す。またグラフなどを描く際の単位は、長さの単位としてはシュバルツシルト半径 a を、速さの単位としては光速 c を取る。

■擬ニュートンポテンシャル

$$\phi_{\text{PN}} = -\frac{GM}{r-a}, \quad a \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

■ポテンシャル ϕ

$$\phi_{\text{N}} = -\frac{GM}{r} = -\frac{ac^2}{2r} \quad (2)$$

$$\phi_{\text{PN}} = -\frac{GM}{r-a} = -\frac{ac^2}{2(r-a)} \quad (3)$$

$$\phi_{\text{GR}} = c^2 \ln \sqrt{1 - \frac{a}{r}} \quad (4)$$

■単位質量あたりの力 f

$$f_{\text{N}} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{ac^2}{2r^2} \quad (5)$$

$$f_{\text{PN}} = -\frac{GM}{(r-a)^2} = -\frac{ac^2}{2(r-a)^2} \quad (6)$$

$$f_{\text{GR}} = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1-a/r}} = -\frac{ac^2}{2r^2 \sqrt{1-a/r}} \quad (7)$$

3. 擬ニュートンポテンシャルの性質

ここでは、擬ニュートンポテンシャルの表す力学的性質について、順序立てて説明していこう。高校でニュートン力学を学んでいれば、内容はお

おむね理解できるかと思う。

3.1 ポテンシャルと力

まず最初に、ニュートン力学、擬ニュートンポテンシャル、一般相対論での、それぞれのポテンシャルの形を比べてみよう。

ニュートン力学では、質量 M の天体の重力ポテンシャル ϕ_{N} は、よく知られているように、中心からの距離 r の関数として、(2) 式のように表せる。この (2) 式の 2 番目の等号は、グラフなどを描く際に便利なように、 GM をシュバルツシルト半径 a や光速 c を使って書き直したものである。

擬ニュートンポテンシャル ϕ_{PN} の (1) 式も、同様な書き直しをすると、(3) 式のようになる。

さらに、シュバルツシルト時空での相対論的重力ポテンシャル ϕ_{GR} は、基準点の取り方によっていくつかの定義があるのだが、ここでの必要な形としては (4) 式のように表せる。なお、この (4) 式で、 \ln は対数記号の一種で自然対数を意味している。

これらのポテンシャルを描いたのが図 1 である。図 1 の横軸はシュバルツシルト半径を単位とした中心からの距離 r 、縦軸は光速の 2 乗を単位としたポテンシャル ϕ の値である。点線がニュートン力学の場合、実線がシュバルツシルト時空の場合で、そして破線が擬ニュートンポテンシャルの場合である (以下同様)。式からもわかるが、ニュートン力学では中心 ($r=0$) でポテンシャルが発散するのに対し、シュバルツシルト時空ではシュバルツシルト半径 ($r=a$) で発散する。擬ニュートンポテンシャルもシュバルツシルト半径で発散するので、シュバルツシルト時空の場合と定性的には合致するが、定量的には発散の仕方は早い。

これらの重力ポテンシャルのもとでの、単位質量あたりの力 f (すなわち加速度) は、 $f = -d\phi/dr$ で計算される。

ニュートン力学では、(5) 式のような、よく知

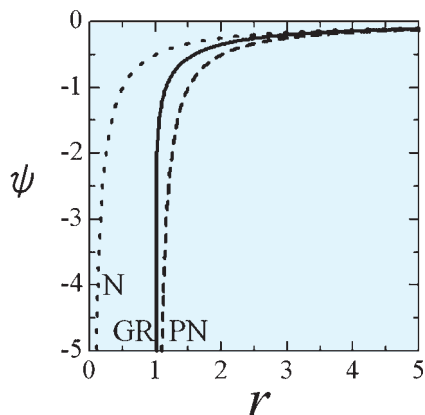


図1 ポテンシャル. 横軸はシュバルツシルト半径 a を単位とした中心からの距離 r , 縦軸は光速の2乗 c^2 を単位としたポテンシャル ψ の値. 点線がニュートン力学, 実線がシュバルツシルト時空, 破線が擬ニュートンポテンシャルの場合(以下同様).

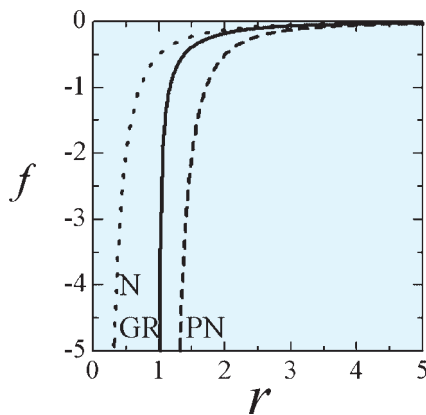


図2 単位質量あたりの力. 横軸は a を単位とした中心からの距離 r , 縦軸は c^2/a を単位とした力 f の値.

られた距離 r の逆2乗に比例する力になる.

擬ニュートンポテンシャルのもとでの力は, (6) 式のような形になる.

シュバルツシルト時空の場合, (4) 式を形式的に微分すれば, (7) 式ようになる. この力はシュバルツシルト半径で発散するが, それは (4) 式のようなポテンシャルの定義の仕方をしたためであり, シュバルツシルト半径で本当は物理的な力が発散するわけではない.

これらの単位質量あたりの力 f については, 図2に示す.

3.2 円運動

次に, 質量 M の天体を回る物体の円運動を考えてみよう.

円運動の角速度を Ω とすると, ニュートン力学では, 物体の単位質量あたりに $r\Omega^2$ の遠心力が働く. 物体が円運動するためには, 物体に働く重力とこの遠心力が釣り合っていないといけない. したがって, ニュートン力学における物体の角速度 Ω_N は, (8) 式ようになる.

擬ニュートンポテンシャルの場合も, 同じようにして, 物体の角速度 Ω_{PN} として, (9) 式が導け

る.

シュバルツシルト時空では, 相対論的な効果のために, 遠心力の項は, $(1-3a/2r)r\Omega^2$ のような形になる. 物理的には, 物体の回転に伴う回転運動自体のエネルギーが質量と等価であるために, ブラックホールに近づくとき, 見かけ上, 重力が強くなったように感じる(遠心力は弱くなったように感じる)ことを表している. 一方, 物体が実際に感じる中心天体の力は, 比較のために出した見かけ上の力(7)式とは違って, ニュートン力学と同じ(5)式の力を感じる. 以上の結果, シュバルツシルト時空において, ブラックホール近傍で測った角速度 Ω_{GR} は, (10) 式のような形になる(一般相対論では場所によって時間の進み方が違うので, 角速度もブラックホール近傍で測定するか遠方で測定するかで異なる).

これら角速度 Ω の違いを図3に示す. ニュートン力学の場合は中心 ($r=0$) で, 擬ニュートンポテンシャルではシュバルツシルト半径 ($r=a$) で, そしてシュバルツシルト時空では $r=1.5a$ で, それぞれ角速度は発散する.

円運動の回転速度 $V (=r\Omega)$ は, それぞれ, (11) 式から (13) 式ようになる. 回転速度の違いは図4に示す.

■円運動の角速度 Ω

$$\Omega_N = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \tag{8}$$

$$\Omega_{PN} = \sqrt{\frac{GM}{r(r-a)^2}} \tag{9}$$

$$\Omega_{GR} = \sqrt{\frac{GM}{r^2(r-3a/2)}} \tag{10}$$

■円運動の回転速度 $V (=r\Omega)$

$$V_N = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{11}$$

$$V_{PN} = \sqrt{\frac{GMr}{(r-a)^2}} \tag{12}$$

$$V_{GR} = \sqrt{\frac{GM}{(r-3a/2)}} \tag{13}$$

■円運動における比角運動量 $l (=r^2\Omega)$

$$l_N = \sqrt{GMr} \tag{14}$$

$$l_{PN} = \sqrt{\frac{GMr^3}{(r-a)^2}} \tag{15}$$

$$l_{GR} = \sqrt{\frac{GMr^2}{(r-3a/2)}} \tag{16}$$

さらに円運動する物体がもつ単位質量あたりの角運動量（簡単に「比角運動量」と呼ぶ）は、 $l=rV=r\Omega^2$ で定義されるが、それぞれ、(14) 式から (16) 式のようになる。角運動量の違いは図 5 に示す。

図 5 からわかるように、円運動する物体の比角運動量は、ニュートン力学では半径が減少するとともに単調に減少するが、シュバルツシルト時空では、ある半径で最小値をもち、それより内側では再び増加する。そして、角運動量が最小になる半径より内側では、相対論的な効果によって円軌道は力学的に不安定になるため、物体はブラックホール周辺の円軌道を維持できずにブラックホールへ向けて落下してしまう。そこでこの半径を「限界安定半径」と呼び、この半径の軌道を「最小安定円軌道」と呼んでいる。

限界安定半径 r_{ms} は、(16) 式を微分した式が 0

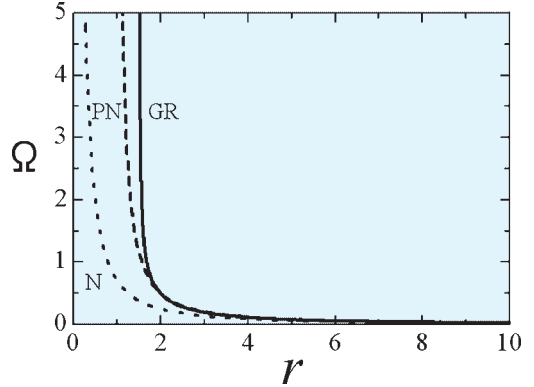


図 3 円運動の角速度. 横軸は a を単位とした中心からの距離 r , 縦軸は c/a を単位とした角速度 Ω の値.

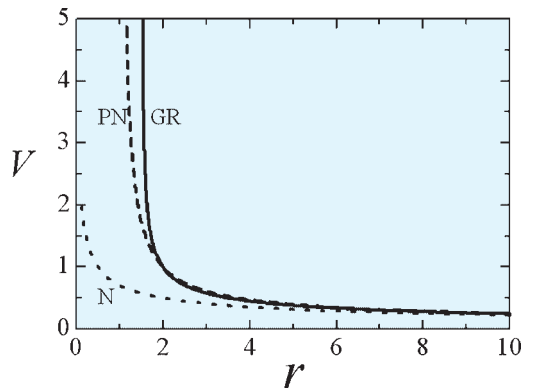


図 4 円運動の回転速度. 横軸は a を単位とした中心からの距離 r , 縦軸は c を単位とした回転速度 V の値.

となる条件から求まり、数値的には、

$$r_{ms} = 3a \tag{17}$$

となる。また限界安定半径での比角運動量は、

$$l_{ms} = 3^{1/2}ac \sim 1.732ac \tag{18}$$

になる。

そこで擬ニュートンポテンシャルの場合だ。角速度や回転速度のグラフではわかりにくいですが、図 5 の角運動量のグラフで見ると、擬ニュートンポテンシャルにおける角運動量がシュバルツシルト時空におけるものを非常によく近似していること

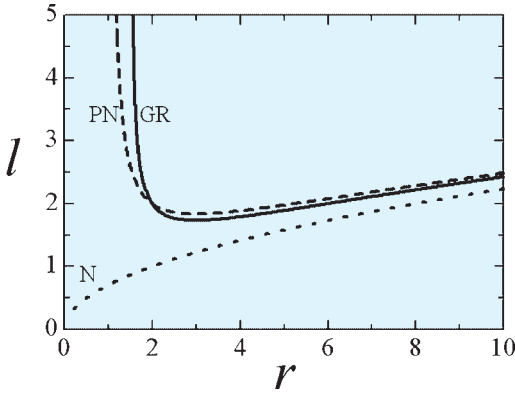


図 5 円運動する物体の単位質量あたりの角運動量。横軸は a を単位とした中心からの距離 r ，縦軸は ac を単位とした角運動量 l の値。

がわかる。比角運動量が最小値をもつという定性的な振舞いも似ているし、定量的にも悪くない。すなわち、(15) 式の微分から、擬ニュートンポテンシャルの場合には、

$$r_{ms} = 3a \tag{19}$$

$$l_{ms} = (27/8)^{1/2} ac \sim 1.837ac \tag{20}$$

となる。最小安定円軌道の半径はシュバルツシルト時空の場合と完全に一致する。ただし、そこでの角運動量の値は相対論で得られる値より 6% ほど大き目である。

3.3 有効ポテンシャルと周転円振動

大学の初等力学で習う話だが、惑星運動など一般の楕円軌道では角運動量が保存される。そのとき、重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの和は、しばしば「有効ポテンシャル」と呼ばれている。

ニュートン力学、擬ニュートンポテンシャル、シュバルツシルト時空での有効ポテンシャル Ψ を表しておくと、それぞれ、(21) 式から (23) 式までとなる (グラフは省略)。これらの式では、比角運動量の値が一定であることを明示するために、比角運動量に添え字 0 を付けた。

■ 有効ポテンシャル Ψ

$$\Psi_N = -\frac{GM}{r} + \frac{l_0^2}{2r^2} \tag{21}$$

$$\Psi_{PN} = \frac{GM}{r-a} + \frac{l_0^2}{2r^2} \tag{22}$$

$$\Psi_{GR} = c^2 \ln \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} - \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \right]^{-1/2} \tag{23}$$

■ 周転円 (エピサイクリック) 振動数 κ

$$\kappa_N = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \Omega_N \tag{24}$$

$$\kappa_{PN} = \sqrt{\frac{GM(r-3a)}{r(r-a)^3}} \tag{25}$$

$$\kappa_{GR} = \sqrt{\frac{GM}{r^3} \left(1 - \frac{3a}{r} \right)} \tag{26}$$

さらに、大学上級から大学院レベルの話になるが、周転円 (エピサイクリック) 運動にも少しだけ触れておく⁴⁾。

重力と遠心力が釣り合っている状態で円運動している物体を、半径方向にちょっと押して、円運動から少しずらしてやってみる。この過程で角運動量が保存されているとすると、有効ポテンシャルを微分して力の式にするとわかるように、半径が少し変化したときに、重力は半径の 2 乗に反比例して変化するが、遠心力は半径の 3 乗に反比例して変化する。そこで、もし軌道の外側へ押しやった場合、(半径の 3 乗に反比例して減少する) 遠心力に比べて (半径の 2 乗に反比例して減少する) 重力の方が強くなるために、全体としては内向きの力が働き、内側へ戻されるようになる。そして元の円軌道を超えて内側へ通り過ぎると、今度は重力より遠心力の方が強くなるので、再び外側へ向けて動いていく。こうして、物体は、元の円軌道を基準として、その内外にある振動数で振動を始めることになる。最初に内側へ押しやった場合でも同様である。

円運動における、この遠心力を復元力とする振動は、ある種の慣性振動だが、業界では「周転円 (エピサイクリック) 運動」と呼ばれており、また

その振動数は「エピサイクリック振動数」と呼ばれている。なお、エピサイクリック振動数をしばしばギリシャ文字の κ (カップ) で表す。

ニュートン力学、擬ニュートンポテンシャル、シュバルツシルト時空でのエピサイクリック振動数を表しておく、それぞれ、(24) 式から (26) 式までとなる。また図 6 にグラフを示す。

ニュートン力学におけるエピサイクリック振動数は、(24) 式からわかるように、円運動の角速度と等しい。すなわち、ニュートン力学では、円運動している物体を半径方向に少し振らせてやると、円運動の周期と同じ周期で半径方向に振動するのである (2π を角速度で割ったものが周期)。

一方、シュバルツシルト時空では、ブラックホールに近づくにつれて、このエピサイクリック振動数は回転角速度よりも小さくなり、ある半径 ($r=4a$) で最大値となって、さらにそれより内側では減少し、シュバルツシルト半径の 3 倍、すなわち先に述べた最小安定円軌道の半径で 0 になる。この性質は、最小安定円軌道の存在と密接に関連していて、相対論的な効果によって、半径方向の振動が抑制されることを表している。そして最小安定円軌道の半径より内側では、エピサイクリック振動自体が存在できない。すなわち、最小安定円軌道の半径より内側では、物体は半径方向に振動できずに、すぐにブラックホールに落下してしまうのである。振動できないという意味で、力学的に不安定なのである。

余談だが、このような相対論的なエピサイクリック振動数は、Kato and Fukue (1980) で初めて調べられ、私自身の修士論文ともなった話である⁵⁾。もっとも修士論文を書いた当人は、当時は物理的な描像は端からないし、定式化もいくら頑張っても指導教官には追いつけずに検算に終わっていた。まあ、何となく物理的なイメージができてきたのは 10 年ぐらい経ってからのことである。トホホな話だが、もう時効ということで勘弁願いたい。閑話休題。

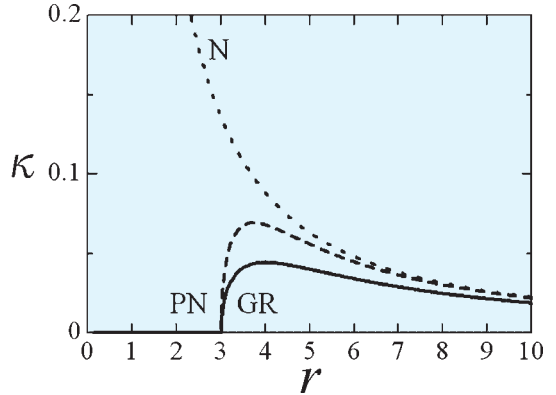


図 6 エピサイクリック振動数. 横軸は a を単位とした中心からの距離 r , 縦軸は c/a を単位としたエピサイクリック振動数 κ の値.

で、擬ニュートンポテンシャルの場合だ。図 6 を見ると一目瞭然のように、擬ニュートンポテンシャルのエピサイクリック振動数はシュバルツシルト時空の場合をよく近似していることがわかる。最小安定円軌道の存在を反映して、シュバルツシルト時空と同じ半径で 0 になっているし、だいたい同じ辺りで最大値をもっている。

数値的には、エピサイクリック振動数が最大値になる半径は、シュバルツシルト時空では、 $r=4a$ だが、擬ニュートンポテンシャルでは

$$r_{\max} = (2 + \sqrt{3})a \sim 3.732a \tag{27}$$

で少しだけずれる。また最大値自体は、シュバルツシルト時空では、 $0.5\Omega_N$ だが、擬ニュートンポテンシャルの場合は、

$$\kappa_{\max} = \sqrt{0.5} \Omega_N \sim 0.707 \Omega_N \tag{28}$$

となり、厳密な相対論の値より 4 割り増しである。

先の角運動量分布もそうだが、このエピサイクリック振動数について、擬ニュートンポテンシャルのものとシュバルツシルト時空のものは、定量的には少し違うものの定性的には非常によく一致している点に注意して欲しい。このような力学的

性質が、擬ニュートンポテンシャルがブラックホール降着流で重宝されているゆえんである。

4. 擬ニュートンポテンシャルの導出

最後に、擬ニュートンポテンシャルの正統性(妥当性)について少し触れておこう。

平坦な時空における擬ニュートンポテンシャルが、曲がった時空であるシュバルツシルト時空の力学的性質をよく模倣している原因の一つは、擬ニュートンポテンシャルがシュバルツシルト時空におけるポテンシャルのある種の近似になっているからだ、と思う。

例えば、(29)式で示しているように、シュバルツシルト時空のポテンシャルである(4)式を変形して、シュバルツシルト半径が十分小さいという近似で展開すると(3行目から4行目)、擬ニュートンポテンシャル(2)式に帰着する。あるいは、(30)式で示しているように、シュバルツシルト時空の有効ポテンシャル(23)式を変形し近似すると(3行目から4行目)、やはり擬ニュートンポテンシャルでの有効ポテンシャル(22)式を導くことができる。さらに動径方向の速度が入った場合(ベルヌーイの式)でも、同様な変形・近似が可能である。

すなわち、擬ニュートンポテンシャルは、相対論的なポテンシャルで、 $a \ll r$ とした場合の近似式になっているのである。近似の程度でいえば、実はニュートン力学も同じ程度の近似である。また同じ程度の近似式は無数に作る事ができて、(1)式とは異なる形の擬ニュートンポテンシャルも提案されているが、現在のところは、パチンスキーたちのオリジナルなものをもっともシンプルでスグレモノだと考えられている。

■擬ニュートンポテンシャルの導出

$$\begin{aligned} \phi_{GR} &= c^2 \ln \sqrt{1 - \frac{a}{r}} \\ &= \frac{c^2}{2} \ln \frac{r-a}{r} = -\frac{c^2}{2} \ln \frac{r}{r-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{c^2}{2} \ln \left(1 + \frac{a}{r-a} \right) \\ &\sim -\frac{ac^2}{2(r-a)} = -\frac{GM}{r-a} \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{GR} &= c^2 \ln \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} - \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \right]^{-1/2} \\ &= -\frac{c^2}{2} \ln \left[\frac{r}{r-a} - \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \right] \\ &= -\frac{c^2}{2} \ln \left[1 + \frac{a}{r-a} - \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \right] \\ &= -\frac{c^2}{2} \left(\frac{a}{r-a} - \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \right) \\ &= -\frac{GM}{r-a} + \frac{l_0^2}{2r^2} \end{aligned} \tag{30}$$

参考文献

- 1) 福江 純, 1989, ハード SF 研究所公報 37, 25
- 2) Paczyński B., Wiita P. J., 1980, A&A 88, 23
- 3) Artemova I. V., et al., 1996, ApJ 461, 565
- 4) Kato S., Fukue J., Mineshige S., 1998, Black-Hole Accretion Disks (Kyoto Univ. Press)
- 5) Kato S., Fukue J., 1980, PASJ 32, 377

Easy Relativity 1: Introduction to the Pseudo-Newtonian Potential

Jun FUKUE

*Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University,
Asahigaoka 4-698-1, Kashiwara, Osaka 582-
8582, Japan*

Abstract: The pseudo-Newtonian potential is now widely used as a powerful tool to mimic the general relativistic effect around a Schwarzschild black hole. This potential enables high school students to calculate the relativistic phenomena. We thus introduce and summarize the properties of the pseudo-Newtonian potential, discuss its validity, and compare it with the rigorous relativity.