

図1 線形解析に基づいた、惑星近傍の面密度分布. 原点に惑星があり、 x 軸が動径方向、 y 軸が方位角方向である. 惑星とともに回転する共回転系に乗り、惑星近傍を拡大した図である. H はスケール高を表す. $GM_p/Hc^2=1$ と置いた計算を示しているが、線形解析の範囲内では面密度の揺らぎは惑星の質量に比例する.

る. 惑星を中心に、 x の正の方向と負の方向にそれぞれ細い1本の腕が立っていることがわかる. この腕が、惑星によって励起された円盤上の密度波である.

まず、密度波の定性的な性質と惑星移動の典型的な時間について議論しよう. ここでは、通常の密度波理論で行われるような解析とは異なる論理を展開するが、流体力学の基本的な事実をもとにしてこの密度波の定性的性質は理解できることを示したい.

簡単のため惑星は円軌道にあるとし、円盤ガスは中心星からの重力と遠心力が釣り合った状態、すなわちケプラー回転していると仮定する. まず、惑星が円盤に与える影響の大枠の理解から始めよう. 惑星は円軌道にあるのだから、惑星と一緒に回転する回転系に乗ると、その系では惑星は止まって見える. したがって、この回転系では惑星によって引き起こされる摂動も定常的に見えるだろう. これは、銀河の密度波理論でもよく知られる仮定であり、密度波理論における「bar ポテンシャル」の役割が、この問題では惑星のポテンシャルに置き換わっただけである.

惑星とともに回転する系に乗って考える. この系において、惑星の位置を原点とする座標系を取る. 惑星のごく近傍を考えることにして、局所的な直交直線(カーテシアン)座標系を張る. 動径方向を x 軸とし、方位角方向を y 軸とする. 円盤はケプラー回転していると仮定しているから、惑星軌道の場所では惑星と円盤の相対速度はゼロである. この点は共回転点と呼ばれる. 共回転点から動径方向に離れると、円盤が差動回転しているために、円盤ガスと惑星の間には相対速度がある. 惑星のごく近傍を考えているから、曲率の効果などを無視して、円盤の回転速度分布を以下のように近似する. 静止系においてケプラー回転の角速度は $r^{-3/2}$ (r は中心星からの距離)に比例する. したがって、 Ω_p を惑星の存在する位置でのケプラー角速度(定数)として、回転系での速度は $v_y = -3/2\Omega_p x$ と近似できる. これは、ケプラー回転による回転速度のずれを x に比例する形で近似したことになっており、以後線形(速度)シアと呼ぶことにする. 以上の近似は、**shearing-sheet**近似と呼ばれる. 今回はさらに単純化して、高さ方向に平均したような二次元のモデルを考える. また、音速を c とすると、円盤の厚みに対応する量であるスケール高 $H = c/\Omega_p$ を定義することができる. 簡単のため、等温の円盤を考え、 c は定数におく.

背景の流れは、線形シアのある流れで、 $|x| = 2H/3$ の位置で惑星との相対速度が音速と等しくなる。そして、それより惑星から離れたところでは惑星との相対速度は超音速になる。特に、ここでは超音速領域を考えよう。惑星との相対速度が超音速になると、惑星重力の影響によって生じた圧力の揺らぎが背景の流れによって「流される」、惑星の重力によって生じた圧力の揺らぎが「密度波」であり、この密度波は「惑星が存在する」という情報をもって惑星から離れていくように伝わる。

どのように惑星の情報が「流される」というのは、円盤の中で情報がどのように伝わるかを知ればよい。このような情報の伝達の解析には、特性曲線がしばしば用いられる。ここで扱いたいような二次元の定常超音速流の特性曲線は以下のように入らされる²⁾。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_x v_y \pm c \sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2} \quad (1)$$

今、 $x > 0$ の領域（惑星の軌道半径よりも外側にある円盤の部分）のみに注目しよう。式(1)に背景の値を入れ、 $x \gg 2H/3$ の部分を見ると、特性曲線として

$$y(x) = -\frac{3}{4} \frac{x^2}{H} + y_0 \quad (2)$$

を得る。ここに y_0 は適当な定数である。符号は情報が惑星から離れる方向に向かっているように取った。（つまり、動径方向の無限遠方からは情報が伝わってこない、あるいは境界において反射がない。）「惑星が存在する」という情報は、この特性曲線に沿って伝わる。つまり超音速の領域では、惑星によって立てられる波などの影響は、この線に沿って伝わることになる。

このようにして励起された密度波は惑星に対してどのような影響を与えるであろうか。図1を見ると、外側 ($x > 0$) の部分では惑星の回転方向に

対して後ろ側 ($y < 0$) に密度が高くなっている領域があるから、外側の密度波は惑星を回転とは逆方向に引っ張ることになる。この力によって惑星はトルクを感じ、軌道長半径が変化する。この軌道長半径の変化は、惑星形成理論では「I型惑星移動」と呼ばれている。I型惑星移動がどの程度の時間スケールで起こるかを調べてみよう。

円盤に励起される密度波は、基本的には音速点で励起され、惑星から離れる方向に伝わっていく。密度波の反作用も重力であるから、惑星から離れた場所に励起された摂動は、惑星に対する反作用もあまり大きくないと考えられる*1。そこで、音速点付近での密度揺らぎの大きさを調べれば、だいたい反作用がどの程度の大きさになるかを見積もることができる。

音速点は、惑星からだいたいスケール高程度離れた場所に存在する。その場所での惑星の重力ポテンシャルは GM_p/H 程度である。ただし、 M_p は惑星の質量であり、 G は重力定数である。この重力ポテンシャルによって密度波が励起される。そのエネルギー（より厳密にはエンタルピー）は、面密度の揺らぎ $\delta\Sigma$ を用いて $c^2\delta\Sigma/\Sigma$ となるので、以下のような関係

$$\frac{\delta\Sigma}{\Sigma} \sim \frac{GM_p}{Hc^2} \quad (3)$$

を導ける。これは惑星の影響による面密度の揺らぎを見積もる式となっている。この密度揺らぎによって惑星にかかる力の強さ δF は、だいたいスケール高程度の範囲の密度揺らぎが効いているとすると

$$\delta F \sim \frac{GM_p \delta\Sigma H^2}{H^2} \sim \frac{(GM_p)^2 \Sigma}{Hc^2} \quad (4)$$

となる。惑星にかかるトルクの強さは $\delta T \sim r_p \delta F$ であるから、ここから惑星の軌道角運動量の変化率がわかる。

ここで、もう一つ気をつけるべき点がある。そ

*1 この主張は、詳しく波の振幅を計算してみることで正しいことがわかる。特性曲線に沿って、密度揺らぎの大きさは $x^{1/2}$ 程度でしか増加しないので、惑星から遠く離れた場所の密度波の影響は無視できる。

れは、図1を見てわかるように、惑星軌道の内側の円盤と外側の円盤で、ほとんど対称な形で円盤に密度揺らぎが励起されているという点である。実際、shearing-sheet 近似の範囲内では惑星の影響に対して内側と外側の円盤は完全に対称な形で応答する。二つが完全に対称であれば、内側の円盤の効果と外側の円盤の効果は完全に打ち消し合うから、惑星移動は起こらない。しかし、ここまでは局所的な直交直線座標系 (x, y) で考えていたが、円盤の曲率の効果などによって実際には惑星の内側と外側の円盤は少し異なる応答をする。例えば、曲率の効果を考えれば、惑星から H 程度離れた場所での応答を考えているから、この効果は H/r_p のオーダーで入ってくる。そこで、この差の効果を考慮することによって実際にかかる力の大きさは

$$\delta F \sim \frac{(GM_p)^2 \Sigma}{Hc^2} \frac{H}{r_p} \quad (5)$$

となる。

以上を踏まえて、I型惑星移動の典型的な時間を $\tau_1 \sim r_p / \dot{r}_p$ と定義して計算すると

$$\tau_1^{-1} \sim \frac{r_p \delta F}{M_p \sqrt{GM_* r_p}} \sim \frac{M_p}{M_*} \frac{\Sigma r_p^2}{M_*} \frac{r_p^2}{H^2} \Omega_p \quad (6)$$

となる。例えば、5地球質量程度のガス惑星コアが5AU付近にあると、この時間は10万年程度になる。これは、観測的に示唆されている円盤ガスの散逸時間に比較して短い³⁾ので、形成された惑星や惑星コアが円盤ガスが散逸するまでに大きく移動してしまう可能性が高いということを示唆している。したがって、惑星移動は惑星形成のシナリオの中でたいへん重要な効果であるということが出来る。

ここまでのオーダー計算では、基本的には惑星が励起した密度波から惑星が受ける反作用について、惑星と円盤ガスの相対速度が超音速になるような領域に注目して議論した。これは、惑星からの距離がスケール高程度離れた場所での円盤の惑星に対する応答を調べているという意味で「遠隔

相互作用」になっている。あるいは、惑星近傍の共回転点付近に励起されている摂動の影響を無視した議論になっている。実際には、惑星の近傍にも密度揺らぎは励起されている。惑星の近傍のガスとの相互作用は「近接相互作用」とみなすことができる。従来、近接相互作用の効果は、遠隔相互作用の効果よりも小さいと考えられてきた。ところが最近になって、円盤の物理状態によっては近接相互作用の効果も同程度に効いている場合があるということもわかってきた⁴⁾。惑星移動の速さの典型的な大きさは式(6)で与えられるが、その方向は「惑星軌道の外側の円盤の応答」と「内側の円盤の応答」と「近接相互作用」の間の大小関係で決まり、詳しい計算が必要である。惑星移動の方向がどちらになるかということは円盤の物理状態に依存し、非常に難しい問題であるということも認識されてきている。円盤の状態によっては惑星が移動しないような場所もあるかもしれない。理論的には惑星移動の方向がはっきりと確定していないというのが現状である。

3. 波の角運動量フラックスとギャップ生成

さて、ここまでの議論では、円盤に励起された摂動の大きさは小さいとした議論を展開してきた。これを言い換えると式(3)のパラメタ GM_p/Hc_2 が1よりも小さい場合ということになる。では、惑星の質量が大きく、この値が $\mathcal{O}(1)$ よりも大きくなる場合は円盤はどのように応答するであろうか。このとき、円盤と惑星の相互作用は非線形になるので、基本的には非線形の数値シミュレーションを使わないとどのようになるかはわからない。しかし、密度波の性質を考えると、定性的にどのようになるかは想像できる。

惑星軌道よりも外側の円盤に励起された密度波は正の角運動量を正の方向に運んでおり、内側の円盤に励起された密度波は負の角運動量を負の方向に運んでいる（したがって、角運動量フラック

スはどこでも正になる). これは, 図 1 の密度分布から直観的な説明を与えると次のようになる. 先に述べたように, 外側 ($x > 0$) では密度波は惑星をその公転とは逆の方向に引っ張り, 惑星から角運動量を抜くように作用する. この抜かれた分の角運動量が, 波の角運動量フラックスとして, 惑星から離れていく方向に運ばれていく.

簡単のため, $x > 0$ の部分だけに注目して議論する. この部分の密度波が何らかの形で散逸すれば, 波のもつ角運動量が円盤に受け渡される. 正の角運動量が円盤の流体粒子に渡されるわけだから, 流体粒子は惑星から遠ざかる方向に動く. したがって, 惑星の周囲に密度が低くなった領域 (以降「ギャップ」と呼ぶ) が生成される. もし, 密度波の振幅が非常に大きければ, 波はすぐに散逸して惑星の周囲に深いギャップを生じるだろう. もしも乱流などで円盤に実効的な粘性があるとすれば, このギャップは粘性拡散によって埋まるはずである. そこで, 惑星の質量と粘性によってギャップ生成の条件が決まる. 惑星質量の条件については密度波が非線形になる条件ということで,

$$\frac{GM_p}{Hc^2} \geq 1 \tag{7}$$

が条件になると考えられる. これは, 「ギャップ生成の熱的条件」と言われている^{*2}. また, 粘性の条件についても数値計算をもとに調べられている. ギャップ生成については古くからの研究があるが⁵⁾, 両者を合わせたような一般的な条件が Crida ら⁶⁾によって提案されており, 「惑星周囲に深いギャップを生じる条件」としてよく引用されている.

4. 密度波の散逸と質量輸送

円盤・惑星相互作用の結果, 円盤構造はどのような進化をするのだろうか. ここでは「ギャップ

生成の熱的条件」をもう少し詳しく考え直しつつ, 円盤・惑星相互作用と円盤進化の関係について議論しよう. 特に「ギャップ生成の熱的条件」が満たされないような軽い惑星について考えてみよう.

原始惑星系円盤の惑星から離れた超音速領域では, 惑星によって立てられた波が惑星から離れる方向に向かって進んでいくということを見た. 線形な密度波は円盤をどこまでも進んでいくのであろうか. たとえ円盤に粘性などのあからさまな散逸がなかったとしても, 答えは否である. この波は, 回転の効果の補正が入っているが, 本質的には音波である. 音波は, 進んでいくうちに波の切り立ちが起こり, 衝撃波となって散逸する.

そこで, 密度波の非線形的発展を考えることで, どの程度の距離まで波が存在するかを調べることができる. 計算の詳細は省くが, 線形解析の解から, 特性曲線がどの程度の摂動を受けるかを考えることで, 十分惑星の質量 M_p が小さい場合, 波が衝撃波となって散逸する (動径方向の) 距離 x_{shock} は, 惑星質量と $x_{shock} \propto M_p^{-2/5}$ のような関係にあるということがわかる. つまり, 惑星の質量が小さければ小さいほど波は遠くまで届くことになる. これは, 小質量の惑星ほど波の振幅も小さくなるので, 衝撃波で散逸するまでの距離が長くなるということから理解できる. より詳しい解析をすると, 衝撃波散逸する距離は地球質量程度の惑星で数スケール高程度の距離であることがわかる⁷⁾.

非軸対称の波が散逸するのであるから, 円盤との間で角運動量をやり取りする. その結果, 円盤にはどのような変化が現れるであろうか. 前章でも述べたように, 惑星軌道の外側では, 波の散逸によって円盤の流体粒子に対し角運動量が与えられる. その結果, 惑星軌道の外側の流体はより外側に動かされ, 惑星から離れようとする. 円盤の

*2 一般的には式 (7) を 1/3 乗し, スケール高とヒル半径の間の関係として引用される.

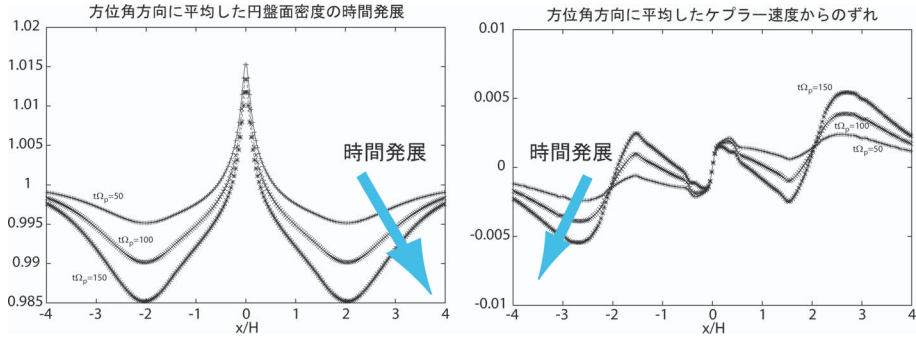


図2 数値シミュレーションによって求めた、惑星周囲の面密度の進化(左)と、円盤の方位角方向の速度の進化(右)。方位角方向に平均した量を示している。矢印の方向が時間発展を表す。

内側においては内側に動かされ、円盤ガスは同じく惑星から離れるように動く。したがって、惑星から離れる方向の質量流束が生まれるはずである。どんなに小さな振幅の音波でもいずれ衝撃波散逸はするから、惑星の質量にかかわらず動径方向の質量流束は存在するであろう。もしも質量流束に動径方向の依存性があれば、それによって面密度構造も進化するだろう。

このことを調べるために、等温の理想気体(粘性なし)を仮定した円盤・惑星相互作用の数値シミュレーションを shearing-sheet 近似の範囲内で行った⁸⁾。図2に、数値計算の結果求めた、方位角方向に積分した円盤の密度進化と方位角方向の速度の進化を示す。後者については、ケプラー速度からのずれをプロットしている。これを見ると、ゆっくりと円盤にギャップを明け、円盤の回転速度も変化していることがわかる。力の釣り合いを調べてみると、円盤にギャップが開くことによって生じた圧力勾配と、回転速度分布の変化によって生じたコリオリ力がほぼ釣り合いながら、準定常的にギャップがあいているということがわかる。したがって、軽い質量の惑星の円盤・惑星相互作用でも厳密な意味で定常解は達成されておらず、質量流束によって円盤構造がゆっくりと変化しているということがわかる。

具体的なギャップ生成の時間スケールを求めるために、いくつかの比較的軽い惑星質量に対して計算を行い、惑星周囲の質量流束を求めた。その結果、誤差15%程度で、 $|x/H| \leq 2$ 程度の範囲内で質量流束は

$$\frac{1}{L_y} \int dy \Sigma v_x = 4.4 \times 10^{-3} \Sigma_0 c \frac{x}{H} \times \left(\frac{GM_p}{Hc^2} \right)^2 \left(\frac{L_y/H}{32} \right)^{-1}, \quad (8)$$

によってフィットできることがわかった。また、二次の摂動論と数値計算を比べ、比較的よい一致を示すことも確かめられた^{*3}。ここで、shearing-sheet 近似での計算をしているために、質量流束はy方向の計算領域の長さに反比例していることに注意しよう。計算領域の長さ L_y を、 $2\pi r_p$ とみなすことによって、実際の円盤における質量流束がどの程度になるのかを予想することができる。質量流束がわかれば、連続の式より、ギャップ生成の典型的時間を

$$\tau_{\text{gap}}^{-1} \sim \frac{\int dy \partial_x \Sigma v_x}{\int dy \Sigma} \quad (9)$$

によって見積もることができる。

円盤の長時間進化を引き起こす質量流束の起源

*3 質量流束は本質的に二次の量であるから、解析的な計算を行う場合に二次の摂動論を行うことは必須である。

は、密度波の衝撃波散逸による円盤と波との角運動量交換である。密度波の衝撃波散逸と質量流束の生成は、どちらも非線形な現象である。注意すべきことは、どんなに小さな質量の惑星を考えても、必ずこの非線形効果はどこかで現れてくるということである。そして、質量流束があれば、連続の式に従って円盤構造そのものを進化させる。

以上の計算により、粘性の影響が無視できてかつ惑星がある軌道長半径に固定された円軌道をしている場合は、惑星の質量にかかわらず十分に時間がたてば惑星周囲にギャップがあくことが示唆された。実際の円盤では乱流粘性があるだろうし、惑星移動も起こるのであろう。そこで、実際に円盤にギャップがあくと考えられるような惑星の質量はどの程度になるのかということ、オーダー計算によって見積もってみよう。

まず、惑星移動の時間スケールとギャップ生成の時間スケールを比較してみよう。ギャップの幅はスケール高程度であるから、比較すべき時間スケールは、ギャップ生成の時間とスケール高程度の距離を惑星が移動する時間である。このことに注意して、式(6)と、式(8)より導かれるギャップ生成の時間を比較するとギャップ生成をするために必要な惑星質量の下限として

$$\frac{M_p}{M_*} \geq 2.0 \times 10^{-5} \left(\frac{H/r_p}{0.05}\right)^3 \left(\frac{L_y/H}{32}\right) \times \frac{\Sigma}{2 \times 10^3 \text{ g cm}^{-3}} \left(\frac{r_p}{1 \text{ AU}}\right)^2 \times \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-1} \tag{10}$$

が得られる。ここで、この条件は数値計算によって求めたギャップ生成の時間スケールと、今までに知られているI型惑星移動の典型的時間を比較して得られたものであることに注意しよう。したがって式(10)は、「熱的条件」(7)とは本質的に異なる見積もりである。もしもI型惑星移動が止まるような状況があれば、どんな小さな質量の惑星でも周囲にギャップをあけるだろう。

惑星がギャップをあけようとしても、粘性拡散があればギャップは埋まる可能性がある。粘性拡散によって、スケール高程度の構造がならされる時間スケールは

$$\tau_{\text{vis}}^{-1} \sim \alpha \Omega_p \tag{11}$$

だと見積もられるので、これと式(8)を比較すると、粘性係数に対して

$$\alpha \leq 1.1 \times 10^{-4} \left(\frac{H/r_p}{0.05}\right)^{-6} \times \left(\frac{M_p/M_*}{2 \times 10^{-5}}\right)^2 \left(\frac{L_y/H}{32}\right)^{-1} \tag{12}$$

という条件を得られる。

これらの条件は、Cridaら⁶⁾によって議論されたギャップの条件とは必ずしも矛盾しないということに注意しておこう。今回求めた条件は、惑星周囲の質量流束から求めた円盤構造の進化の時間スケールをI型惑星移動や粘性拡散の時間スケールと比較したものであるから、「惑星がギャップをあけ始められる条件」を表しており、どこまでギャップがあくかということには言及していない。一方で、先行研究での議論は「深いギャップのあく条件」であるから、「ギャップがあいた結果どうなるか」を表している。

この章の終わりに、円盤の長時間進化のモデルについて言及しておこう。よく用いられるのは、Lynden-BellとPringleのモデル⁹⁾に惑星がかけるトルクを足したようなモデルである¹⁰⁾。このモデルは、円盤・惑星相互作用による円盤構造の進化を記述できるだろうか。このモデルを導く際の大きな仮定は、円盤の回転速度分布がケプラー回転のままであるということである。ところが、図2を見てわかるように、質量流束によって惑星の周囲にギャップが生成されつつある段階で、円盤の回転速度分布もそれに対応しながら変化し、ギャップ生成によってできた圧力勾配をコリオリ力によって打ち消そうとしている。結局、二次元の数値計算の結果に基づいて質量流束など

を与えて、一次元のモデルを作る以外にないのであろうと考えている。

5. ギャップ生成のその後

さて、ここまでで比較的低い質量の惑星であっても、十分時間をかければ円盤にギャップをあけることが可能であることを見た。そこで、どこまでギャップがあくのかということが次の興味になる。

粘性がある場合は、粘性拡散とギャップ生成が釣り合うときというのが答えになるだろう。では、粘性が効いていない場合はどのようになるだろうか。この問題について、現時点では明確な答えは持ち合わせていないが、ガスの不安定性によってギャップ生成が止まるのではないかと考えている。コリオリ力と圧力勾配が釣り合っていて、かつそれなりにギャップが深くなっているような場合、非軸対称の摂動に対して線形不安定性が存在する(ロスビー波不安定)¹¹⁾。この不安定性が起こることによって、ギャップ生成が止まると考えられる。しかし、角運動量の源としての惑星は円盤中に存在し続けるから、おそらくギャップはある程度の深さを保ったまま、動径方向に広がっていくであろう。

このことを検証するためには、より長時間の数値計算を大きな計算領域において行う必要がある。今後の課題として追求していきたい。また、今回は二次元の計算を紹介したが、三次元性の効果がどのようになるのかといったことも検証していくべきことである。

また、前章でギャップ生成と粘性係数の関係について簡単な議論を行ったが、ロスビー波不安定性も粘性の影響を受け、粘性があるような円盤ではロスビー波不安定は起こりにくくなる。粘性のある場合とない場合では、円盤・惑星相互作用と円盤の長時間進化は異なった描像になるであろう。このような点も定量的に調べていくべきことである。

6. まとめ

本稿では、粘性なしの二次元の円盤における円盤・惑星相互作用について、特に密度波の生成・伝播・散逸に注目して円盤進化について議論した。惑星は、円盤に密度波を生成する。そしてその密度波はいずれ衝撃波散逸を起こし、角運動量を円盤に渡す。その結果、惑星の周囲にギャップが生成する。そして、最終的なギャップの深さはロスビー波不安定性の励起によって決まるのではないかと考えられる。ロスビー波不安定性は惑星周囲の円盤構造を弱い乱流状態にするから、惑星移動などにも影響を与えるであろうし、円盤の長時間進化にも影響を与えるだろう。ロスビー波不安定で作った渦の中でさらにダストが凝集してまた惑星ができる、などといったシナリオも想像できる。

非粘性の場合、ギャップの幅は少なくともスケール高程度であるだろう。中心星から比較的離れた位置に惑星が存在すれば、ALMAなどの高解像度観測によってギャップが見えてもよいだろう。しかし、外側では磁気回転不安定性などが起こる可能性が高いので、乱流粘性の値が大きいかもしれない。今後の電波や赤外線での円盤の高解像度直接撮像観測によって、円盤進化や円盤・惑星相互作用の現場が見えてくると期待される。円盤・惑星相互作用は、今までほとんど理論的にしか研究されてこなかったが、観測的にいろいろな制限を付けることが現実的な話になる。今後の展開が注目されるところである。

7. 付録：密度波理論との対応

2章で述べた密度波の性質は、通常の密度波理論のコンテキストではどのように現れるのだろうか。式の上での対応について簡単に述べておこう。

惑星の近傍に注目することにして、shearing-sheet 近似をする。ガスの運動を記述する流体力

学の方程式は

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\Omega_p \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} \\ = - \frac{c^2}{\Sigma} \nabla \Sigma + 3\Omega_p^2 \mathbf{x} \mathbf{e}_x - \nabla \phi_p \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここに、 Σ は面密度、 \mathbf{v} は速度、 Ω_p は惑星の位置でのケプラー角速度、 c は音速、 ϕ_p は惑星の重力ポテンシャルを表す。左辺の第三項は円盤が回転していることによるコリオリ力を表し、右辺第二項は遠心力と中心星の重力の差であるところの潮汐力を表す。

惑星のない状態をバックグラウンドと考え、そこから惑星重力の摂動によってどのように円盤が応答するかを、線形解析によって調べよう。背景の状態は一様密度で速度シアのある状態である。この状態に対する惑星重力による摂動を考える。

通常、密度波理論においてよく行われる手続きに従うと、次のような手順で解を求めることになる¹⁾。まず、回転系において定常な解を仮定して $\partial/\partial t = 0$ とする。そして、 y 方向をフーリエ変換することによって x 方向の常微分方程式に直して解く。適当な式変形を行うことによって、方位角方向の速度の摂動に対して次のような二階の常微分方程式を得ることができる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \delta v_y + \left(\frac{9}{4} \frac{\Omega_p^2 k_y^2}{c^2} x^2 - k_y^2 - \frac{\Omega_p^2}{c^2} \right) \delta v_y = S \quad (15)$$

ここに、右辺は惑星のポテンシャルを含む密度波の源泉項であり、左辺は円盤上に励起される密度波の x 方向への伝播の性質を表す。また、 k_y は方位角方向の波数である。密度波理論で通常使われる、方位角方向の腕の数 m と対応させると、 $k_y = m/r_p$ となる。式 (15) は、左辺によって記述され

る波が、右辺の源泉項によって励起されていると解釈することができる。また、左辺はちょうど量子力学の定常一次元シュレーディンガー方程式のような形をしており、量子力学で使われるような解析がここにも使えるということも注意しておく。

密度波の性質を考えるために短波長近似を行ってみよう。このとき、 x 方向の波数を k_x と置くと、

$$k_x^2 = k_y^2 \left(\frac{9}{4} \frac{x^2}{H^2} - 1 - \frac{1}{k_y^2 H^2} \right) \quad (16)$$

となる。 $k_x^2 > 0$ となる領域では波が存在し、そうでない領域では波は減衰する。前者は波の「伝播領域」と呼ばれ、後者は波の「減衰領域」と呼ばれる。この境界の位置は「実効的な Lindblad 共鳴」と呼ばれる。密度波理論で出てくる Lindblad 共鳴は、非軸対称なモードの感じる「振動数」である $(3/2)\Omega_p k_y x^{*4}$ がエピサイクリック振動数（ケプラー回転する円盤の場合は Ω_p である）に一致する点として定義されるが、「実効的な Lindblad 共鳴」で k_y がゼロの極限を取ると Lindblad 共鳴と一致する。この極限は、tight-winding 近似に対応する。式 (16) は、高い k_y のモードでは、圧力の効果によって Lindblad 共鳴の位置がずれることを表している。 $k_y H \gg 1$ となるモードについては、 $x > 2H/3$ でのみ k_x は実数となり、波が存在することになる。したがって、実効的な Lindblad 共鳴が「音速点」に対応しており、この意味でフーリエ空間での描像と、「音速点で波が励起される」という実空間での描像が対応する。

式 (16) より、短波長近似において k_y でラベルされるモードからの寄与は、 $x \gg 2H/3$ の領域において

$$\delta f \propto \exp \left[ik_y \left(\frac{3}{4} \frac{x^2}{H} + y \right) \right] \quad (17)$$

*4 ここでは shearing-sheet 近似に基づく局所的な解析を行っているが、この「振動数」を円盤全体の大域的な解析と対応させると、 $m(\Omega(r) - \Omega_p)$ となる。 $\Omega(r) - \Omega_p$ が、惑星の場所 r_p での回転角速度と円盤のある場所 r での角速度差である。腕の数が m のモードが立っているのだから、そのモード自身の感じる「振動数」としては m 倍がかかる。

となることがわかる。ここに、 k_x の符号は、波が惑星から離れる方向に進むように取った。式 (17) を式 (2) と比較すると、特性曲線に沿って波の位相がそろっていることがわかる。これは、特性曲線に沿って波（解としてはフーリエ空間で求まっている）が進んでいることを示している。

参考文献

- 1) Goldreich P., Tremaine S., 1979, ApJ 233, 857
- 2) ランダウ L. D., リフシッツ E. M. (竹内 均訳), 1971, 流体力学 (東京図書), 第 12 章
- 3) Haisch K. E., Lada E. A., Lada C. J., 2001, ApJ 553, L153
- 4) Paardekooper S.-J., Baruteau C., Crida A., Kley W., 2010, MNRAS 401, 1950
- 5) Lin D. N. C., Papaloizou J., 1986, ApJ 307, 395
- 6) Crida A., Morbidelli A., Masset F., 2006, Icarus 181, 587
- 7) Goodman J., Rafikov R. R., 2001, ApJ 552, 793
- 8) Muto T., Suzuki T. K., Inutsuka S.-i., submitted
- 9) Lynden-Bell D., Pringle J. E., 1974, MNRAS 168, 603
- 10) Rafikov R. R., 2002, ApJ 572, 566
- 11) Li H., Finn J. M., Lovelace R. V. E., Colgate S. A.,

2000, ApJ 533, 1023
 12) Binney J., Tremaine S., 2008, Galactic Dynamics (Princeton University Press, Princeton), 第 3 章

Disk-Planet Interaction: Density Wave and Gap Formation Process

Takayuki MUTO

Department of Earth and Planetary Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ohkayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, JAPAN

Abstract: The gravitational interaction between the planet and the protoplanetary disk is one of the important ingredients in the theory of planet formation. Type I planet migration and gap opening are both caused by disk-planet interaction. In this text, we briefly review the physical properties of the density wave launched by an embedded planet. Then, we discuss the evolution of the surface density structure in the vicinity of the planet as a result of disk-planet interaction.