

# 相対論的輻射流体力学のスヌメ

## 5 光玉近似と相対論的変動エディントン因子の導出



福江 純

〈大阪教育大学 〒582-8582 大阪府柏原市旭ヶ丘 4-698-1〉

e-mail: fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

相対論的領域で適切なクロージャー関係が不明なため、相対論的輻射流体力学のモーメント定式化はいまだ完全ではない。本稿では解析的な立場から、相対論的領域におけるクロージャー関係として、相対論的変動エディントン因子の形を探る試みについて紹介したい。加速流においては、ガスとともに動く共動観測者が見通せる“視界範囲”は下流に伸張した卵形—光玉—になる。一般的に、この光玉の内壁からの輻射場は非一様だし、内壁は観測者に対して相対速度をもつので、両方の効果によって、観測者の測定する輻射場は非等方的になり、共動系でのエディントン因子は  $1/3$  からずれる。鉛直方向に動いている平行平板定常一次元流の場合における相対論的変動エディントン因子  $f$  は、光学的厚みを  $\tau$ 、光速で規格化した速度を  $\beta$ 、4元速度を  $u$  とすると、低速領域では  $f = 1/3[1 + (16/15)d\beta/d\tau]$  のように導出され、高速領域では  $f = 1/3 \exp(d \ln u / d\tau)$  のように振舞う。まだ光学的に厚く局所的な取り扱いなので、球対称の場合なども含め、今後のさらなる研究が必要である。

### 1. おさらい：相対論的輻射流体力学におけるモーメント定式化の不完全性

相対論的輻射流体力学のモーメント定式化は、その方程式系を閉じる式—クロージャー関係—が得られていないので、まだ完成していない<sup>1)–5)</sup>。

以前の記事<sup>1)</sup>や今回の連載の第1回目<sup>2)</sup>などで述べたように、モーメント定式化では、式(モーメント式)の個数より変数(モーメント量)の個数のほうが多くなるため、何らかの仮定をして、方程式系を閉じさせないといけない。光学的に十分厚い領域では拡散近似が、輻射場が等方的ならエディントン近似がよく使われる。また光学的に厚い領域から薄い領域にかけては、流束制限拡散近似 FLD や変動エディントン因子 VEF などが

使われることが多い。さらに相対論的になった場合には、共動系において、これらの近似が適用されることが多いが、その物理的根拠が危ういことは、すでに述べたとおりだ(参考文献6も参照)。

基本方程式・原理方程式を数値的に解けば、そのような問題点は現れないが、(一般)相対論的輻射輸送方程式の数値解法は、おそらくまだ実現していない。また数値的扱いでは、物理的見通しや性質がわかりにくい。そこであくまでもモーメント定式化のもとで、クロージャー関係のそれらしい形を仮定<sup>7), 8)</sup>したり、あるいは適切な形を導く<sup>9)–11)</sup>のも有効な手段になる。今回は、解析的な方法で「相対論的変動エディントン因子」を求めると試み<sup>9), 10), 24)</sup>について紹介したい。

以下、2節で数値的手段と解析的手段の違いを少し議論し(Lv10)、3節で相対論的領域にお

る等方性の破れを指摘し (Lv20), 4 節で共動観測者の視界範囲を考え (Lv30), さらに 5 節で相対論的変動エディントン因子を導出し (Lv30), 最後に 6 節で今後の課題などを提示してみたい (Lv40~). なお, レベル (Lv) については, 学部で Lv1 から Lv3 ぐらい, 大学院で Lv10 から数十として設定してある.

## 2. 数値的手段と解析的手段

理論的な問題を解決するためには, 主としてペンと鉛筆 (と少しばかりの数値計算) を用いる「解析的手法 (analytical method)」と, 方程式をプログラミングしてコンピューターに食わせ結果を吐き出させる「数値的手法 (numerical method)」がある.

もう少し細分すると, いろいろな仮定を置いて基礎方程式を単純化し, ペンと紙だけを用いて初等関数などによって表される解を求める「解析的手法」, 定常や一次元などの仮定を置いて基礎方程式を常微分方程式にまでもっていき, 簡単な数値計算で解を求める「半解析的手法 (semi-analytical method)/数値計算 (numerical calculation)」, そしてあまり仮定を置かずに基礎方程式のまま, 差分法その他いろいろな数値アルゴリズムを用いてコンピューターで解く「数値シミュレーション (numerical simulation)」の三つに分けることもできよう.

解析的な方法で得られた結果は, 最初の仮定によって取り込む物理が明確だし, 見通しや解の性質が掴みやすい. また最初の仮定の範囲内では汎用的で普遍的な結果が得られる. しかし, 一般に単純な場合しか扱えないので, かかわる物理過程が増えたり, 非定常や多次元になると, とたんに効力を失う (相似解がある特殊な場合などを除いて). また特殊な場合を除き, 解析的手法は非線形の問題も苦手だ.

逆に, 数値的手法は, さまざまな物理過程を取り込めるし, 非定常, 多次元, 非線形, 何でもご

ざれである. そして具体的で定量的な結果が得られる. ただし, どの物理過程が重要なのかとか, 非定常性や多次元性は本質的なのかなど, 数値シミュレーションで得られた結果を正しく判断し洞察する能力はやはり必要だ. また初期条件が適切か, アルゴリズムは正しいか, そもそも方程式が正しいかなど, 問題が生じる部分も少なくない. これらが不適切でも結果は出てくるが, 古くから知られているように, コンピューターにクズを入れればクズが出てくるだけなのである.

現在, 理論天文学の問題は数値シミュレーションで解かれることが多い. コンピューターの性能は飛躍的に上がっているので, 今後も数値シミュレーションが大がかりになっていくのは間違いないだろう. ただし, コンピューターリソースは有限なので, 計算範囲には常に限界が存在することも事実だ. したがって, 解析的にしか扱えない問題が必ず存在する. また最終的には数値シミュレーションをするにせよ, 問題の見通しを立てるために, 最初は解析的に取り扱うことも少なくないだろう. 数値シミュレーションの初期状態として, 解析解が使われることもある<sup>12), 13)</sup>. さらに, 数値シミュレーションではあらゆるケース, あらゆるパラメーターを調べ尽くすことはできないので, 普遍性を導くために, 数値シミュレーションの結果を解析的に再解釈する場面も出てくるだろう. そもそも, 数値シミュレーションで解くべき基礎方程式は, 解析的に導出しなければならない.

ええと, この節でいったい何が言いたいかというと, 数値シミュレーションをするとたしかになにがしかの結果は出てくるが, 落とし穴もたくさんあるよ, ということだと思う. もう一つは, 解析的手法と数値的手法の両方をきわめた賢者は, 理論屋としては最強だろうということだ. さらに言えば, 道標として, 観測についてもきっちり知っておけば, 天下無敵である.

### 3. 拡散近似と等方性の破れ

ここでは、ブラックホール流やブラックホールジェットなど相対論的な流れにおいては、しばしば拡散近似や輻射場の等方性が成り立たなくなることを示しておこう。

星の内部などのように、光学的厚みが十分に厚い領域で、光子が何度も吸収散乱を繰り返しながら、ランダムウォーク的に拡散していく場合、光子の実効的な速度は、光速  $c$  よりもかなり遅くなる (図 1)。具体的には、光学的厚みを  $\tau$  とすると、実効速度 (光子拡散速度) は、

$$v_{\text{diffusion}} = c/\tau$$

ほどになってしまう。これは以下のように考えればよい。

実距離が  $R$  のところまで  $N$  回のランダムウォークで進むとする。光学的厚みを  $\tau$  とすると、平均自由行程  $l$  は

$$l = R/\tau$$

である。一方、 $N$  回のランダムウォークで進む距

離は平均自由行程の  $\sqrt{N}$  倍ほどだ。したがって  $R$  の距離を進むには、

$$R = \sqrt{N} \times l$$

となる必要がある。これらの式から、すぐに、

$$N = \tau^2$$

が出てくる。

一方、ランダムウォークで光子が実際に踏破する距離は単純に  $Nl$  だが、上の関係から、

$$Nl = \tau^2 \times R/\tau = R\tau$$

になる。

すなわち、光速  $c$  で進めば  $R/c$  の時間で済むところが、 $R\tau/c$  の時間がかかるわけだから、光学的厚みが十分に厚い領域での光子の実効速度は、 $c/\tau$  に落ちてしまうわけだ。たとえば太陽内部だと、直接進めば 2.3 秒で進める距離を、100 万年もかかって踏破する。

星の内部や降着円盤の内部のように、大気が静止していれば、別に何も問題はない。しかし、大気が運動していれば、何か問題が生じそうなことはすぐにわかるだろう。そして、光学的厚みが十分に大きければ (大きいほど)、流れの速度は容易に光子の実効速度を超える。

そのような場合にまず起こるのが「光子捕捉 (photon trapping)」である。すなわち、光子はガス中を拡散して輻射流束を生む一方、輻射エネルギーなどはガスと一体になって運動する。翻って、ガスとともに運動する共動系でみれば、光子はガスが運動していることを知らずに、“(共動系で) 静止した” ガスの中を、静止系と同様に「拡散 (diffusion)」しているつもりなのだと思う。しかし他方で “(共動系で) 静止した” ガスの中には、輻射エネルギー密度などの光子の等方成分があるが、これは実はガスとともに運動—「移流 (advection)」と呼ぶ—しているのである。光度にした場合、前者を「拡散光度 (diffusion luminosity)」

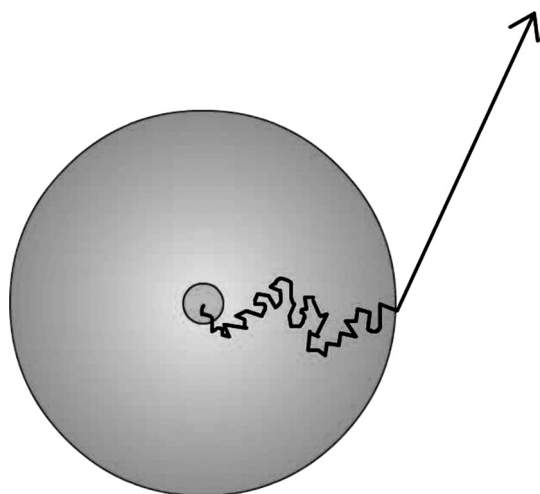


図 1 光子拡散。中心で発生した光子は、大気中をランダムウォークでじわじわ進んでいき、表面からは自由流として光速で飛んでいく。

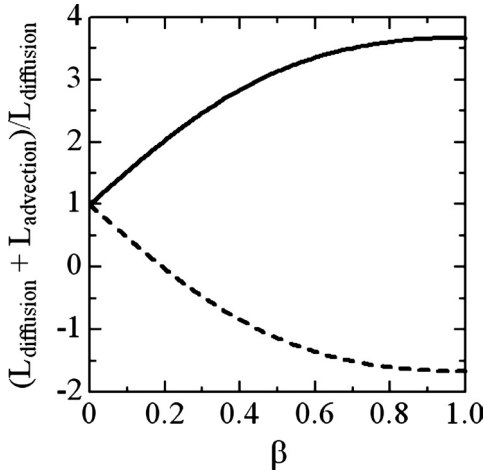


図2 光速で規格化した速度 $\beta$ の関数として表した静止系での光度(拡散光度+移流光度)と拡散光度の比。外向きの流れ(実線)では、速度が大きくなると移流光度の分が増加していく。逆に、内向きの流れ(破線)では、移流光度の分は流れとともに落ち込んでいくため、流れの速度が大きくなると、静止系での光度自体が負になってしまう。

後者を「移流光度 (advection luminosity)」と分ける。そして前者は常に正だが、後者は流れの方向によって正にも負にもなる。

たとえば、完全に光学的に厚くて、輻射場が共動系で黒体輻射になっていれば、静止系での光度(拡散光度+移流光度)と拡散光度の比は、

$$\frac{L_{\text{diffusion}} + L_{\text{advection}}}{L_{\text{diffusion}}} = \frac{1 + \beta^2 \pm (16/3)\beta}{1 + \beta^2}$$

のようになる(図2)。

先にも触れたように、相対論的輻射流体力学では、共動系での拡散近似はよく使われる。しかし、共動系での拡散近似という描像が正しいのは、厳密には、ガスが一定の速度で動いている一様流の場合だけなのである。ガスの流れに速度勾配があれば、光子からみて周りのガスは静止しているように見えなくなるだろう。それはたぶん困ったことなのである。

たとえば、ガスの流れに速度勾配があれば、共

動系においてさえ、輻射場の等方性が破れてしまう。このことは以下のように考えればよい。

共動系で測った不透明度を $\kappa$ 、ガス密度を $\rho$ とすると、共動系における平均自由行程は、

$$l \sim 1/(\kappa\rho)$$

となる(ここら辺の議論は、第3回で紹介した共動系と静止系の見え方の違いとは別の話である。念のため)、共動系(座標 $s$ )で速度勾配があり、その大きさが $dv/ds$ だとすると、平均自由行程だけ先での速度の増加分は、

$$\Delta v = l \frac{dv}{ds} \approx \frac{dv}{\kappa\rho ds} = \frac{dv}{d\tau}$$

ほどになる(光学的厚み  $d\tau = \kappa\rho ds$ )。

共動系で周囲が等方的に見えるためには、この速度増加分が光速に比べて十分に小さくなければならない。逆に、速度増加分が光速に比べて無視できないような“速度勾配が大きな”相対論的流れでは、ドップラー効果や光行差のために、共動系でさえ輻射場は等方的でなくなる。その結果、エディントン因子を1/3と置く単純なエディントン近似は破綻してしまうだろう。もちろん、単純な拡散近似も破綻してしまう。

#### 4. 視界範囲と光玉近似

ここからが本稿の本論である。相対論的運動大気中での輻射場の性質を考えるために、最初に、ガスとともに動く共動系の観測者が、自分の周囲のどのように見渡しているかという点から検討してみよう。

##### 4.1 光玉と光壺

まず一番単純な場合として、鉛直方向に加速している光学的に厚い相対論的輻射流を想像してみよう(図3)。流れの奥底の光学的厚みが十分に大きな領域では、光子の平均自由行程は非常に短くて、どの方向へ向かって平均自由行程の長さは同じだろう。そして平均自由行程の範囲内では速度勾配などの影響は無視できて、共動観測者の観

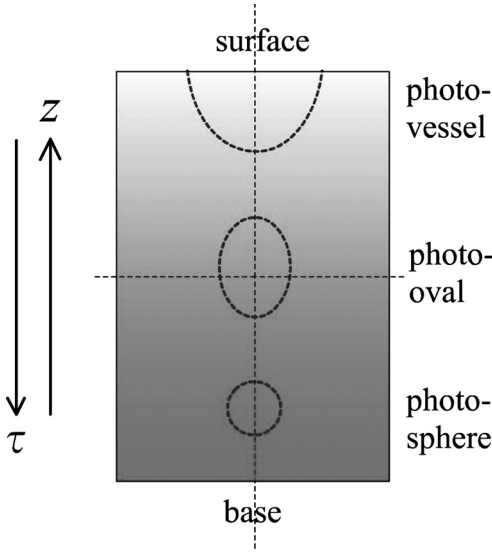


図3 鉛直方向への相対論的輻射流の模式図. 流れは鉛直方向へ加速されている(速度勾配がある). 破線が共動観測者の観測する視界範囲—光玉—である.

測する輻射場は十分に一様等方に見えると推測される. このような領域では, 共動系における従来のエディントン近似が使えるだろう.

しかし, 光学的厚みが十分に大きくなければ, あるいは速度勾配が十分に大きければ, 話は違ってくる. すなわち正の速度勾配に対応して負の密度勾配があるので, 観測者からみて光学的厚みが1の範囲, すなわち観測者の「視界範囲」は, 流れの下流方向に伸張した卵形になるだろう. この視界範囲の形状を, ここでは「光玉 (one-tau photo oval)」と呼んでおくことにする. この光玉の内壁からの輻射場が一様という保証はなく, また内壁は観測者に対して相対速度をもつので, 両方の結果, 観測者の測定する輻射場は非等方的になる. そしてそのような場合の相対論的変動エディントン因子は, 一般に, 光学的厚み, 流速, 速度勾配などの関数になると予想される.

なお, 速度勾配が大きすぎると, 下流方向の光学的厚みが1を切ってしまう可能性もある. その場合には, 視界範囲は閉じた卵形にならず, 下流

に開いた「光壺 (photo cup/photo vessel)」になるだろう.

光玉の形状は, 観測者の速度およびその近辺の速度勾配に依存するが, それらを与えれば, 光玉の形状が求まり, さらに観測者と光玉内壁との速度差も得られる. 共動系で光玉内壁が一様等方に放射をすると仮定すれば, 共動系の観測者が受ける放射場の諸量を計算することができる.

#### 4.2 光玉の形状

では早速, 簡単な仮定のもとで, 光玉の形状を求めてみよう<sup>9), 10)</sup>. 図4にあるように, 鉛直方向一次元の定常相対論的輻射流において, 共動系の座標で高さが  $z=z_0$  (表面から測った光学的厚みは  $\tau=\tau_0$ ) にいる共動観測者を考える. 観測者の4元速度は  $u=u_0$  とする (光速で規格化した速度を  $\beta$ , ローレンツ因子を  $\gamma=\sqrt{1-\beta^2}$  とすれば,  $u=\gamma\beta$  になる). また観測者からみて流れの下流方向か

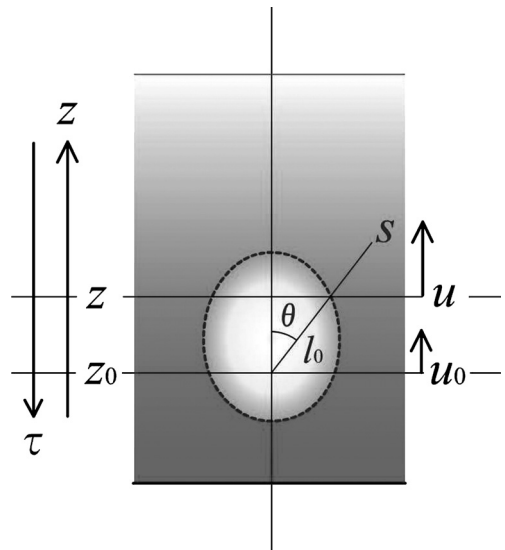


図4 共動観測者の周りの視界範囲—光玉—の状況設定. 共動観測者は,  $z=z_0$  ( $\tau=\tau_0$ ) に位置し, 4元速度は  $u=u_0$  とする (光速で規格化した速度を  $\beta$ , ローレンツ因子を  $\gamma=\sqrt{1-\beta^2}$  とすれば,  $u=\gamma\beta$  になる). また観測者からみて流れの下流方向から  $\theta$  だけ傾いた  $s$  方向への平均自由行程を  $l_0$  とする.

ら測って、 $\theta$  だけ傾いた  $s$  方向への平均自由行程を  $l_0$  とする。

$$z - z_0 = s \cos \theta \tag{1}$$

$$\rho c u = J \quad (= \text{const.}) \tag{2}$$

$$d\tau \equiv -\kappa \rho dz \tag{3}$$

$$u = u_0 + \left. \frac{du}{dz} \right|_0 (z - z_0) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_0 (z - z_0) \\ &= \rho_0 + \frac{d\rho}{du} \left. \frac{du}{dz} \right|_0 (z - z_0) \\ &= \rho_0 - \frac{\rho}{u} \left. \frac{du}{dz} \right|_0 (z - z_0) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \tau_s &= \int_0^{l_0} \kappa \rho ds \\ &= \int_0^{l_0} \kappa \left[ \rho_0 + \left. \frac{d\rho}{du} \frac{du}{dz} \right|_0 (z - z_0) \right] ds \\ &= \int_0^{l_0} \kappa \left[ \rho_0 + \left. \frac{d\rho}{du} \frac{du}{dz} \right|_0 s \cos \theta \right] ds \\ &= \kappa \rho_0 l_0 + \kappa \left. \frac{d\rho}{du} \frac{du}{dz} \right|_0 \frac{\cos \theta}{2} l_0^2 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\kappa \left. \frac{d\rho}{du} \frac{du}{dz} \right|_0 \frac{\cos \theta}{2} l_0^2 + \kappa \rho_0 l_0 - 1 = 0 \tag{7}$$

$$\kappa \rho_0 l_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a \cos \theta}}{a \cos \theta} \tag{8}$$

$$a \equiv - \left. \frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} \right|_0 = - \left. \frac{d}{d\tau} \ln u \right|_0 \tag{9}$$

$$- \left. \frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta > \frac{1}{2} \tag{10}$$

$$\left. \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta > \frac{\kappa J}{2c} \tag{11}$$

さてまず、図 4 からわかるように、上記の変数の間には幾何学的に (1) 式の関係が成り立つ。また特殊相対論的な連続の式は、鉛直方向定常次元の場合は (2) 式になる。さらに、光学的厚みの

定義は (3) 式で与えられる。

ここで、速度勾配を導入しよう。光学的厚みが十分に大きいとすれば（平均自由行程が流れのスケールに比べて十分に小さければ）、観測者の視界範囲は狭く、その範囲内ぐらいでは、速度勾配は線形だと仮定していいだろう。速度としては低速領域では通常の 3 次元速度  $\beta$  でもいいが<sup>6)</sup>、より高速領域では 4 元速度  $u$  のほうが適切だと思われる<sup>7)</sup>。そこで、観測者の近傍で 4 元速度を展開すると、(4) 式ようになる。またもし密度も線形的に変化すると仮定すれば（線形的でない場合は後述する）、密度も同じように展開できて、連続の式を使うと、(5) 式のように表せる。

次に、観測者から  $s$  方向への光学的厚みを算出してみる。観測者から  $s$  方向へ  $l_0$  の距離まで積分した光学的厚みは、もし密度の変化も線形的だと仮定すると、(6) 式のように解析的に積分を実行できる。この光学的厚みを 1 と置くと、先に述べた視界範囲—光玉—を表す関係式として、(7) 式が得られる。これは  $l_0$  に関する 2 次方程式なので簡単に解けて、有意な解として (8) 式が得られる。ただしここで、パラメーター  $a$  は、(9) 式のよ

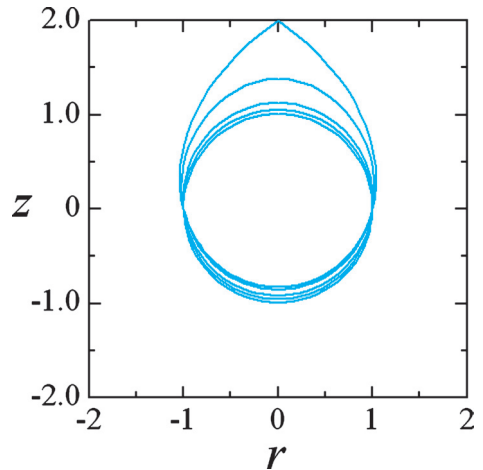


図 5 線形領域における視界範囲。パラメーター  $a$  (対数速度の勾配) が、0.02, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5 と大きくなるにつれ、光玉は下流へ延びた形になる。

うな対数速度の勾配である。

パラメーターをいろいろ変えて、光玉の形状を表したのが図5である。パラメーター  $a$  (対数速度の勾配) が大きくなるにつれ、予想どおりに視界範囲が下流へ延びていくことが見て取れる。

ただし、線形領域では、(8)式の根号の中が負になると解がなくなる。あるいは、線形領域の扱いが破綻する条件は、(10)式あるいは(11)式になる。角度  $\theta$  が0では  $a > 1/2$  で破綻する。

$$\tau_s = \int_0^{l_0} \kappa \rho ds = \frac{\kappa J}{c} \int_0^{l_0} \frac{1}{u} ds \quad (12)$$

$$u = u_0 + \left. \frac{du}{dz} \right|_0 s \cos \theta \quad (13)$$

$$du = \left. \frac{du}{dz} \right|_0 \cos \theta ds \quad (14)$$

$$\tau_s = \frac{\kappa J}{c} \frac{1}{\left. \frac{du}{dz} \right|_0 \cos \theta} \int_{u_0}^u \frac{du}{u} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_s &= \frac{\kappa J}{c} \frac{1}{\left. \frac{du}{dz} \right|_0 \cos \theta} \log \frac{u}{u_0} \\ &= - \frac{u_0}{\left. \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta} \log \frac{u}{u_0} \end{aligned} \quad (16)$$

$$0 = \left. \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta + u_0 \log \frac{u}{u_0} \quad (17)$$

$$u = u_0 - \left. \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta \kappa \rho_0 l_0 \quad (18)$$

$$\kappa \rho_0 l_0 = \frac{\exp\left(-\left. \frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta\right) - 1}{-\left. \frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} \right|_0 \cos \theta} \quad (19)$$

ところで、速度勾配は(4)式のように線形的だと仮定したが、密度勾配まで(5)式のように線形的だとは限らない。そこで速度勾配は線形的だが、密度勾配は連続の式から決まる準線形的な場合を考えてみよう。

その場合、観測者から  $s$  方向へ  $l_0$  の距離まで積

分した光学的厚みは、連続の式(2)式を用いると、(12)式のように表せる。さらに速度を表す(13)式から微小速度の(14)式を出して、変数変換すると、(15)式となる。そしてこれは解析的に積分できて、(16)式が得られる。この光学的厚みを1と置くと、密度変化が準線形的な場合に対する視界範囲—光玉—を表す関係式として、(17)式が得られる。これと速度の表式である(13)式や平均自由行程の定義などから、(18)式が得られ、最終的に平均自由行程を表す解として、(19)式となる。この(19)式では、対数速度の微分(先のパラメーター  $a$ ) は、露わに書いてある。

この準線形的な場合について、パラメーターをいろいろ変えて、光玉の形状を表したのが図6である。パラメーター  $a$  (対数速度の勾配) が大きくなるにつれ、予想どおりに視界範囲が下流へ延びていくことが見て取れる。

ただし、線形領域の場合と異なって、パラメーター  $a$  が大きくなっても解は存在し、下流方向へ開いてしまうことはない。もっとも実際には、視界範囲が大きくなると、その範囲内で速度勾配が

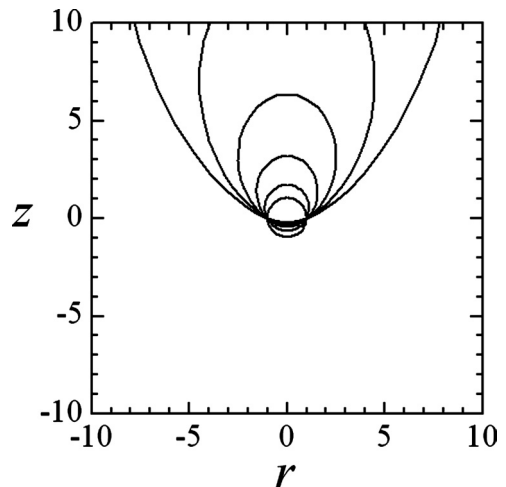


図6 準線形領域における視界範囲。パラメーター  $a$  (対数速度の勾配) が、0.1, 1, 2, 3, 4, 5 と大きくなるにつれ、光玉は下流へ延びた形になる。

線形という仮定が成り立たなくなるだろう。

### 5. 変動エディントン因子の導出

共動観測者の視界範囲がわかったので、次の段階は、観測者が感じる輻射場を計算してエディントン因子を導出することだ。簡単のために、輻射の振動数依存性は考えない（灰色近似あるいは電子散乱だけだと考えてもいい）。

さらに、観測者が受ける輻射場は光玉の内壁から放射されたものだけだとして（図7）。もちろん実際には、光玉内部の光学的厚みが1より小さい領域からの輻射も届くだろうし、光玉外部の光学的厚みが1より大きい領域からも輻射はやってくるだろうが、もっとも影響が大きいのは光学的厚みが1の光玉内壁からのものと仮定する。長年の勘（笑）はこの仮定が妥当だと言っているが、この部分が、光玉近似で輻射場を計算する際の核心であり脆弱な部分かもしれない。

静的で光学的に厚い大気中では、輻射場は一樣

で等方的になる。しかし今回のような相対論的加速大気では、二つの理由から輻射場は等方的でなくなる。

まず共動系における輻射強度は、一般的には一定ではなく、座標（あるいは光学的厚み）と方向の関数だ。すなわち光玉内壁から放射される輻射自体が、一樣ではなく、等方的ですらないかもしれない。ただし、光学的厚みが十分に大きければ、輻射強度の非等方性はあまり問題にならないだろう。また輻射強度の非一樣性は、光学的厚みに関してゆっくり変化するなら、輻射流束には影響が出るが、輻射エネルギー密度と輻射圧にはあまり影響しないので、エディントン因子にも影響を与えない<sup>9)</sup>。そこで今回のモデル<sup>10)</sup>では、簡単のために、光玉内壁の輻射場は一樣等方とした。

次に、相対論的加速流であるために、共動観測者と光玉内壁の間には速度差がある。その結果、ドップラー効果や光行差などの相対論的效果のため、輻射場は等方的でなくなる。たとえば、鉛直方向に加速している場合、下流方向へは速度が大きく、上流方向へは速度が小さくなるため、共動観測者からみると光玉は膨張しているように観測されるだろう（図7）。すなわち、光玉内壁から放射された輻射強度は、ドップラー効果を受ける。また光玉内壁からの輻射強度が非等方だと、光行差も効いてくるが、今回はそれは入っていない。

後は、以上述べたことを式に書き下すだけである。

$$I_{co} = \frac{I}{(1+z)^4} \tag{20}$$

$$\Delta\beta = \frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta\beta_0} \tag{21}$$

$$\beta = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \tag{22}$$

$$\beta_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} \tag{23}$$

$$u = u_0 \exp\left(-\frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} \Big|_0 \cos\theta\right) \tag{24}$$

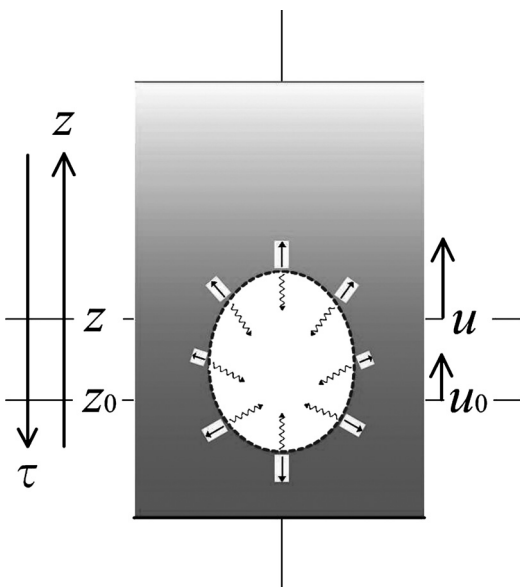


図7 共動観測者の受ける輻射。光玉内壁の輻射は一般的には非一樣で、また相対論的效果を受けるため、共動観測者の感じる輻射場は非等方になる。



$$1+z = \frac{1+\Delta\beta \cos \theta}{\sqrt{1-(\Delta\beta)^2}} \quad (25)$$

変数として、共動観測者が感じる輻射強度を  $I_{co}$ 、光玉内壁の輻射強度を  $I$  (いまは一定と仮定)、共動観測者と光玉内壁の速度差を  $\Delta\beta$ 、速度差に起因する赤方偏移を  $z$  (座標とは混同しないように) とする。

このとき、相対論的不変量の関係から、(20) 式のように、共動観測者の輻射強度は  $(1+z)$  の4乗だけ変化を受ける。また速度は鉛直方向の成分しかないので、共動観測者と光玉内壁の速度差は、相対論的な速度の和から、(21) 式のようになる。ここで速度  $\beta$  と4元速度  $u$  の間の関係は、(22) 式および(23) 式のようになっている。また先の(18) 式と(19) 式から、光玉内壁の4元速度は共動観測者の4元速度を用いて(24) 式のように表される。そして最後に、因子  $(1+z)$  は、速度差と角度を使って(25) 式のようになる。

これらの関係式を用いることによって、必要とされる諸量はすべて、共動観測者の4元速度  $u_0$ 、速度勾配  $du/d\tau|_0$ 、方向余弦  $\cos \theta$  の関数で表されていることになる。したがって、共動観測者の受ける輻射強度も、数値的にはあるが、求めることが可能になる。

$$cE_{co} \equiv \int I_{co} d\Omega_{co} \quad (26)$$

$$F_{co} \equiv \int I_{co} \cos \theta d\Omega_{co} \quad (27)$$

$$cP_{co} \equiv \int I_{co} \cos^2 \theta d\Omega_{co} \quad (28)$$

$$f \equiv \frac{P_{co}}{E_{co}} \quad (29)$$

$$f \equiv \frac{1}{3} e^{-a} = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{1}{u} \frac{du}{d\tau}\right) \quad (30)$$

輻射強度が求まれば、(26) 式から(28) 式のように角度方向に積分して、共動観測者の位置における輻射エネルギー密度、輻射流束、輻射圧を計算することは簡単である。そして、(29) 式のよう

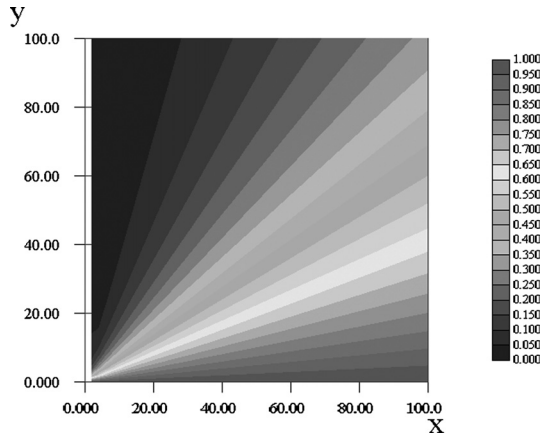
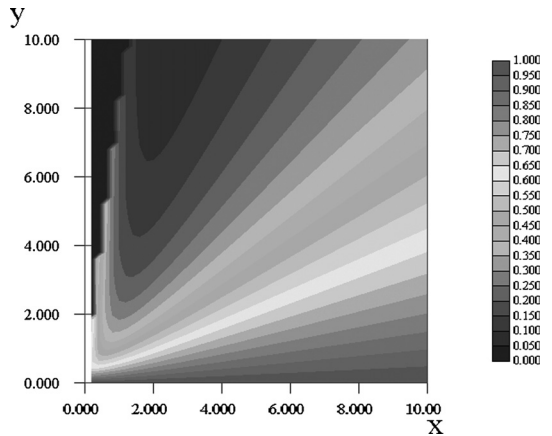
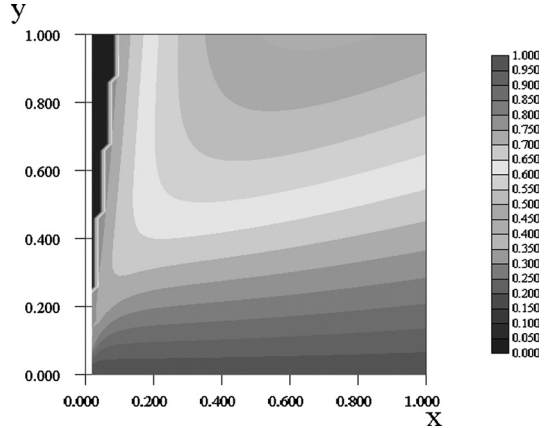


図8 平行平板流における相対論的変動エディントン因子(3倍にしてある)。横軸は4元速度  $u_0$ 、縦軸は速度勾配  $-du/d\tau|_0$ 。表示範囲は上から(1, 1) まで、(10, 10) まで、(100, 100) まで。

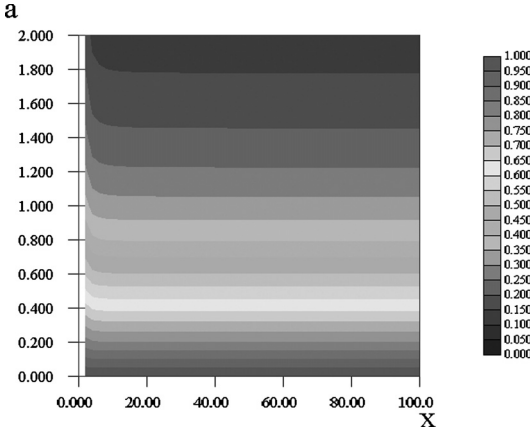


図9 平行平板流における相対論的変動エディントン因子 (3 倍にしてある). 横軸は 4 元速度  $u_0$ , 縦軸は対数速度勾配  $-d \ln u / d\tau|_0$ . 表示範囲は (100, 2) まで.

に, 輻射エネルギー密度と輻射圧の比から共動系におけるエディントン因子が算出できる. 角度積分はしてしまうので, パラメーターは, 共動観測者の 4 元速度  $u_0$  と速度勾配 (あるいは対数速度の勾配  $a = -d \ln u / d\tau|_0$ ) である.

具体的にエディントン因子の値を計算した結果が, 図 8 と図 9 である. 図 8 では, 横軸を 4 元速度, 縦軸を速度勾配としたパラメーター平面上に, エディントン因子の値を 3 倍したものを等高線で描いている. また図 9 では, 横軸を 4 元速度, 縦軸を対数速度の勾配としたパラメーター平面上に, やはりエディントン因子の値を 3 倍したものを等高線で描いている.

$$f\left(\tau, \frac{d\beta}{d\tau}\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{16}{15} \frac{d\beta}{d\tau}\right) \quad (31)$$

$$f\left(\tau, \frac{du}{d\tau}\right) = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{1}{u} \frac{du}{d\tau}\right) \quad (32)$$

$$f = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{16}{15} \frac{\beta}{u} \frac{du}{d\tau}\right) \quad (33)$$

これらの計算結果から, (鉛直方向の平行平板流における) 相対論的変動エディントン因子—以下 ppRVEF—について, 顕著な傾向があることが見て取れる.

まず, 速度がそれほど大きくなく速度勾配も小さい範囲では, ppRVEF は速度にあまり依存せず, おおむね速度勾配に比例して減少しているように見える (図 8 上). 実際, 速度が十分に小さい近似 ( $\beta < 0.1$ ) では, 解析的に積分を実行することができて, ppRVEF は (31) 式のように表されることが証明されている<sup>9)</sup>.

しかし, 速度や速度勾配が大きくなると, ppRVEF が一定の線は放射状になる (図 8 下). そこで, 縦軸を速度勾配の代わりに対数速度勾配にとると (図 9), 速度・速度勾配が大きくなると, ppRVEF は対数速度勾配に依存することが見えてくる. そして具体的にフィッティングしてみると, (32) 式のように, 対数速度勾配の指数関数でよく近似できることがわかった<sup>10)</sup>. 数式としては, なかなか綺麗な形をしている (笑).

ちなみに, 低速領域の (31) 式と高速領域の (32) 式を合わせると, (33) 式のような両方の領域で成り立つ関係が得られる. これはあまり綺麗な形をしていない (泣).

以上が現段階まででわかっている, 半解析的に調べた, 光学的厚みが十分に厚いときの ppRVEF の振舞いと近似表式である. ただし, この近似表式は, 光速近傍でまだ少し検討事項が残っているかもしれない. というのは, 直感的には, 光速に近くなると ppRVEF は 1 に近づくのではないかと予想できるし<sup>7), 8)</sup>, 数値シミュレーションで求められている ppRVEF の結果<sup>11)</sup>でも, 速度が光速近くになると ppRVEF は 1 に近づくことが示されている. しかし今回の結果は, ppRVEF は高速領域では対数速度勾配にのみ依存して速度自体には依存しなくなる. 今回の解析と数値シミュレーションとは, 設定条件が違うので単純には比較できないが, 光速近傍での振舞いが違う点は少し気になる. この原稿を書いている最中にも, 二転三転, 考えが変わっているのだが, 現時点 (2008 年 8 月 7 日) では, すべての物理量を共動系で考

える範囲ではこれでいいよととらえてはしている。とまれ、まだまだ検討する余地は残しているが、現段階での ppRVEF の振舞いを報告したものである。

## 6. しゅくだい：ラディウス・インコグニタ

本稿では、光学的に厚く局所的な取り扱いのもとで、鉛直方向の平行平板流における相対論的変動エディントン因子 ppRVEF の振舞いを考えた。

光学的に薄い領域（光玉から光壺）まで含めた場合の ppRVEF の形状や、流れが球対称な場合の sphRVEF の形状、より一般的な発散の流れの場合にはどうなるか、さらに灰色近似ではなく振動数依存性がある場合などなど、相対論的変動エディントン因子の研究は先が長そうだ。

さて、全般的な今後の課題というやつだが、半年ほど前に、本連載の構想を立てて書き始めたころは、第4回の相対論的ミルン-エディントン解や今回の相対論的変動エディントン因子の解析的導出で、より発展させた新しい結果を出している

予定だった。しかし半年経ってみると、第2回の輻射圧駆動ブラックホール風のほうが進展したり、第3回のブラックホール風の観測的特徴が発展したりしていた。

研究は気の向くまま（笑）、というだけじゃなく、並行処理が追いつかないくらいテーマがありすぎるのである（図10）。

初回に並べたように、現時点でわかる範囲で変動エディントン因子を与えて相対論的輻射輸送の問題を解いてもいいし<sup>5), 14), 15)</sup>、ブラックホール風など相対論的輻射流体流を解いてもいい<sup>1), 3), 7), 8)</sup>。そのようなブラックホール風がどのように観測されるかという問題も、相対論的輻射輸送的観点での研究はほとんど手つかずである<sup>4), 16)</sup>。もちろん基礎過程に立ち戻って、今回のように相対論的変動エディントン因子などを調べることも必要だ。体力と時間とお金があれば、原理方程式である相対論的輻射輸送方程式をきちんと解きつつ、相対論的輻射流体力学の問題を解いていくのが、正攻法でもあり最終手段でもある（余談だが、遊ぶのにも、体力と時間とお金がいる）。

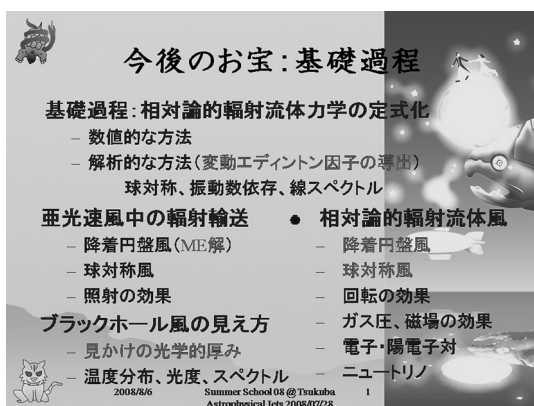


図10 お宝メモ。2008年の夏に行われた第38回天文天体物理夏の学校で「宇宙ジェット理論のすべて（誇張）」というタイトルで招待講演したおりのまとめのページ。でも200p近くのテンコモリファイルで、サブリミナル効果しかなかったと思う。なお、このときのpdfファイルはHPに貼ってある。

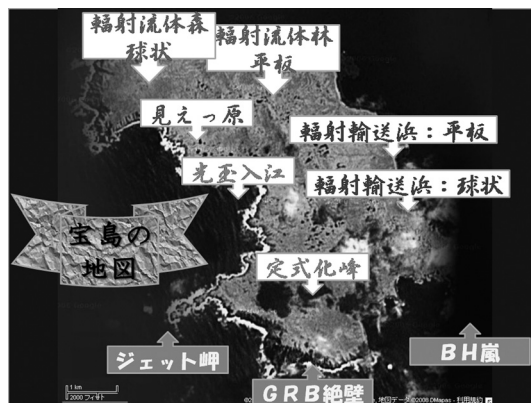


図11 お宝地図。グーグルアースから探してきた宝島の地図。南米最南端のフェゴ諸島の一つ、ジュール・ベルヌの『十五少年漂流記』の舞台、チェアマン島のモデルがここら辺の島だったはず。

ともかく、相対論的輻射流体力学の領域は、トゥームレイダースが入り込んでいない太古の遺跡あるいは宝島のようなもので、お宝が至る所に転がっている。どこを掘っても何か出てくる状態なのだ (図 11)。

最初の報告<sup>1)</sup>でも触れたように、

- ブラックホール降着流
- 相対論的天体風、亜光速宇宙ジェット
- 相対論的爆発、ガンマ線バースト、ファイアボール
- ニュートリノ輸送、ニュートリノトラス
- 初期宇宙の動的諸現象、ファーストジェットなど、さまざまな場面で、相対論的輻射流体力学は必要とされる。そろそろ宝の地図を広げて未踏なる光の国 (Radius Incognita) へと踏み込む時期だろう。

### 歴史的補遺

第 1 回で、天体における輻射輸送の問題は、1920 年代にミルン<sup>17)</sup> (Edward Arthur Milne; 1896–1950) やエディントン<sup>18)</sup> (Arthur Stanley Eddington; 1882–1944) が始めたこと書いた。エディントンの名著は昔に読んだことがあるが、ミルンは未見で、ぼくがもっていた輻射輸送関係の初期論文は、コジレフ<sup>19)</sup> (N. A. Kosirev) とチャンドラセカール<sup>20)</sup> (S. Chandrasekhar; 1910–1995) までである。そのチャンドラセカールの論文には、ジャスター–シュバルツシルト問題というのが出ているのだが、引用文献がなくて、気になっていた。連載第 1 回を読んだ近藤雅之さんから、関連文献のご教示をいただき、最初期の論文がおおよそ判明した。

ジャスター (Arthur Schuster; 1851–1934) の 1903 年の *Philosophical Magazine* がおそらく一番古く、次が 1905 年の *ApJ* ‘Radiation through a foggy atmosphere’<sup>21)</sup> だろうとのこと。早速 ADS で調べてみると、前者は見つからなかったが、後者と、1903 年の *Observatory* の論文<sup>22)</sup> が引っか

かった。ちなみにジャスターは当時ビクトリア大学所属で、星屋さんかと思ったが、Wikipedia によるといろんな仕事をしていたようである。

また 1906 年にはシュバルツシルト (Karl Schwarzschild; 1873–1916) の論文 (ドイツ語の学術誌) があるらしい。こっちも ADS で検索してみたが、その前後で、皆既日食の論文とか幾何光学の論文などはあったが、輻射輸送らしいものは見つからなかった。便利にはなったが、もちろん ADS は完全ではない。シュバルツシルトはゲッチンゲン大学所属で、シュバルツシルト・ブラックホールで有名なのだが、輻射輸送もやっていたわけである。ちなみに、アメリカで研究した息子のマーティン・シュワルツシルド (Martin Schwarzschild; 1912–1997) は星屋で、チャンドラセカールのものと並んで、星の内部構造論に関する古典的なテキストも書いている。

ぼく自身が (相対論的) 輻射流体力学に関して初めて研究したのは、加藤正二先生が中心になって行ったコンプトン散乱を取り入れた運動プラズマ中における輻射流体力学の定式化だった<sup>23)</sup> (ぼくの関係した論文の中では、唯一、図が 1 枚もない論文である)。当時、とても面白そうな分野だとは思ったものの、まだ力量が足りないのも痛切に感じた。いいチャンスだから書いておくが、論文の主著者こそ福江の名前にはなっているものの、テーマの設定はもちろん計算を終始リードしたのも加藤先生である。まだ 30 歳前で Lv10 もなかったろう。その後の 20 年ほどで Lv がそれほど上がったわけではないが、初回に述べたように、そろそろよかろうと考えて踏み込んだ最後の秘境が相対論的輻射流体力学の世界である。もう少し歳を取ったら (笑)、その歴史を調べてみるのも面白いかもかもしれない。

相対論的輻射流体力学の世界へ最初の手ほどきをしていただいた加藤正二先生には、心より感謝いたします。筑波大学の梅村雅之さん、小泉

貴之さん、秋月千鶴さんには、いろいろ議論していただいている点、深く感謝いたします。近藤雅之さんには文献のご教示を御礼申し上げます。藤田一恵さんにはイラストを使わせていただきありがとうございます。連載にあたっては編集部の方々にお世話になりました。おかげさまで、最近とても面白いと思っている内容を総合的に紹介できました。

文章にまとめ直すことは自分自身の理解を整理することに非常に役立つものである。実際、論文の段階では棚上げにしていたようなことで理解が進んだことも少なくない。ちなみに、連載開始時には、Lv50 ぐらいだったが、いまは Lv100 (誇張) ぐらいにはなったかな。

**追記:**

その後、共動系での輻射場が非等分な場合など、より一般的な状況も調べた<sup>24)</sup>。その結果、ppRVEF は対数速度勾配のべき関数の方が合うこと、光速近傍で 1 に近づく場合もあることなどがわかった (2008 年 10 月 21 日)。

**参考文献**

- 1) 福江 純, 2006, 天文月報 99, 505
- 2) 福江 純, 2008, 天文月報 101, 420
- 3) 秋月千鶴, 福江 純, 2008, 天文月報 101, 504
- 4) 住友那緒子, 福江 純, 2008, 天文月報 101, 576
- 5) 福江 純, 2008, 天文月報 101, 000
- 6) Kato S., Fukue J., Mineshige S., 2008, Black-Hole Accretion Disks—Towards a New Paradigm (Kyoto Univ. Press)
- 7) Fukue J., 2006, PASJ 58, 461
- 8) Akizuki C., Fukue J., 2008, PASJ 60, 337
- 9) Fukue J., 2008, PASJ 60, 377
- 10) Fukue J., 2008, PASJ 60, in press
- 11) Koizumi T., Umemura M., 2008, submitted to MNRAS

- 12) Okada R., Fukue J., Matsumoto R., 1989, PASJ 41, 133
- 13) Akizuki C., Fukue J., 2006, PASJ 58, 469
- 14) Fukue J., 2008, PASJ 60, 137
- 15) Fukue J., 2008, PASJ 60, 627
- 16) Sumitomo N., Nishiyama S., Akizuki C., Watarai K., Fukue J., 2007, PASJ 59, 1043
- 17) Milne E. A., 1921, MNRAS 81, 382
- 18) Eddington A. S., 1926, The Internal Constitution of Stars (Cambridge Univ. Press)
- 19) Kosirev N. A., 1934, MNRAS 94, 430
- 20) Chandrasekhar S., 1934, MNRAS 94, 444
- 21) Schuster A., 1905, ApJ 21, 1
- 22) Schuster A., 1903, Observatory 26, 379
- 23) Fukue J., Kato S., Matsumoto R., 1985, PASJ 37, 383
- 24) Fukue J., 2008, submitted to PASJ

**Let's Challenge the Relativistic Radiation Hydrodynamics: 5 Relativistic Variable Eddington Factor**

**Jun FUKUE\***

*Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University, Asahigaoka 4-698-1, Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan*

Abstract: The field of the relativistic radiation hydrodynamics is very wide and deep but fundamental for various relativistic astrophysical phenomena. However, its moment formalism is insufficient and imperfect. Thus, it is necessary many fundamental researches, and there remain many treasures and orbs to be found. In this final article we introduce the analytical approach to derive the form of a relativistic variable Eddington factor in the plane-parallel vertical flow.