

X03a 多層状格子を利用したポアソン方程式の数値的解法

松本倫明、花輪知幸 (名大理)

自己重力系の数値シミュレーションでは、ポアソン方程式のような楕円型偏微分方程式を解く必要がある。我々は多層状格子反復法 (multi-grid iteration method) を用いて、3次元のポアソン方程式を解く Fortran プログラムを開発し、さらにベクトル・並列計算機上で最適化を行なった。このプログラムは各点に与えられた密度に対して、重力ポテンシャルを計算する。今回は、国立天文台計算機センターの VPP300 を用いて、テスト計算を行なったので、その結果を報告する。

- 【解の収束性】テスト計算では、様々な波長 (空間スケール) を持つ密度分布に対して重力ポテンシャルの数値解を求め、厳密解からの誤差を調べた。その結果、誤差の波長依存性はなく、全ての波長の解に関してほぼ一様に収束した。典型的な誤差の値は $10^{-3}\%$ 程度で、全ての波長の密度分布に対して、偏微分方程式の打ち切り誤差よりも小さくなることを確認した。このように、多層状格子反復法の解の精度は、密度の波長に依存しない。これは、SOR 法に代表される緩和法よりも、多層状格子反復法が優れている点である。また、多層状格子反復法は、FFT に代表される高速法のように、丸め誤差が解に蓄積することがない。
- 【計算時間 (メッシュ数依存性)】総メッシュ数 N の解を求める場合、多層状格子反復法の計算量は N に比例する。VPP300 でのテスト計算によると、 N が 129^3 から 257^3 の場合、計算時間は $N^{0.6}$ に比例する。これは、メッシュ数が多くなると、ベクトル化・並列化の効率が良くなるためである。これに対し、高速フーリエ変換法 (FFT) や巡回還元法に代表される高速法の計算量は $N \log N$ に比例する。また、SOR 法に代表される緩和法の計算量 (反復回数) は N^2 に比例する。このように、多層状格子反復法は、他の一般的な解法よりも、総メッシュ数が増えても、計算量の増加が小さい。
- 【計算時間 (ベクトル化率)】総メッシュ数が 257^3 、プロセッサ数が 15 の場合、計算時間は 1.06 秒である。この時のベクトル化率は 98.05%、ベクトル加速率は 32.1 である。ただし、並列化によるオーバーヘッドのために、総メッシュ数が小さいほど、並列化の効率が悪くなる。
- 【Fortran ソース・プログラムの自動生成】メッシュ数とプロセッサ数を与えると、Fortran のソース・プログラムを自動生成する Perl スクリプトを開発した。これにより、メッシュ数やプロセッサ数を変更した場合、Fortran プログラムの複数の箇所を変更する必要がなくなる。