

X01a ピカール・チェビシェフ法による摂動力学系のベクトル数値積分

福島登志夫 (国立天文台)

ピカール・チェビシェフ法とは、常微分方程式を数値積分する手法の一つで、ピカールの逐次近似とチェビシェフ多項式近似を組み合わせた方法である(福島、96年春年会; Fukushima, 1997, AJ, accepted)。具体的には、解を表現する基底関数にチェビシェフ多項式を採用し、その係数ベクトルを適当な初期値から出発して逐次近似法で求めていく。この方法は、多段法・Runge-Kutta法・外挿法など従来の数値積分法が小さい刻み幅で解を徐々に求めていったのに対し、必要とされる全積分区間で通用する粗い近似解から始めて逐次近似で精密解を構築するという全く異なるアプローチに基づいており、どちらかといえば惑星の軌道運動理論を三角級数で表現するような解析的な解の構築法によく似ている。逐次近似が収束するためには、与えられた問題が摂動論的である必要があるが、そのような問題に対しては(1)解が数表ではなく近似多項式として得られる、(2)全積分区間における一様近似解(にごく近い解)が得られる、(3)摂動が小さいときは多段法より2-4倍速く解が得られる、(4)反復回数を制御することにより任意の精度の解を得ることができる、などの利点がある。

さて、ピカール・チェビシェフ法の最大の利点は、ベクトル化・並列化が可能な点である。ピカールの逐次近似法でもっとも時間がかかる部分は、既に得られた近似解を用いて次の近似に必要な積分を計算する部分であるが、この積分はピカール・チェビシェフ法では適当な次数のチェビシェフ多項式の零点における微分方程式の右辺値の線形結合として求められる。この評価点の数(通常の数値積分法では刻み幅の数に相当する)は数百ないし数千に達するが、各々の右辺値の評価は全く独立に行え、従ってベクトル化・並列化により大幅な高速化が期待される。このように、ピカール・チェビシェフ法は係数ベクトルに関するベクトル写像の繰り返しとして記述されるので、単にベクトル化するだけでもかなりの速度向上が期待できる。実際、拡張エンケ法(Fukushima, 1996, AJ, 112, 1263)に現れる代表的な摂動力学系に対し、国立天文台に最近導入された富士通製ベクトルコンピュータVX/1Rを用いて数値実験した結果、力学系の自由度が1と最小であるにもかかわらず、多段法によるスカラー計算に比べて最大で3000倍の高速化を実現した。並列化を行えば、もう一段の高速化が期待できる。