K02a　２次元同次式ポテンシャル系の積分可能性の新しい必要条件

吉田春夫 (国立天文台)

重力３体問題のような具体的に与えられた Hamilton 系に対し，解が解析的に求められるか否か（積分可能か否か）を決定することは力学の基本的な問題であるが，その完全な判定条件は知られていない．２次元の同次式ポテンシャル系においては以下の結果 (Yoshida, 1987) が知られ広く応用されてきた．
定理１：$V(\boldsymbol{q})$ を整数次数 k 次 $(k \neq \pm 2)$ の同次式ポテンシャルとする自由度２のハミルトン系 $H = (1/2)\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{q})$ を考える．代数方程式 $\nabla V(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}$ の解を一つ固定しヘッシアン行列 $D^2V(\boldsymbol{c})$ の固有値を λ と $k-1$ とする．系が積分可能，つまりハミルトニアンと独立な解析的第一積分が存在するためには固有値 λ は少なくとも領域

$$0 \le \lambda \le 1,\ \ k-1 \le \lambda \le k+2,\ \ 3k-2 \le \lambda \le 3k+3, \ldots$$

に入らなければならない．

定理１は，(1a) 系の直線解の周りの変分方程式が Gauss の超幾何方程式に変換されること，(1b) 変分方程式の独立な周期に対するモノドロミー行列のあらわな表現，及び (1c) 系の積分可能性とモノドロミー行列の可換性を関連づける Ziglin の定理 (1983)，に基づいている．最近，Morales and Ramis (1997, preprint) は定理１を強化する次の主張を得た.（簡単のため $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$ の場合を除外する.）
定理２：系が積分可能となるためには固有値 λ は離散的な値

$$\lambda = \{0, 1, k-1, k+2, 3k-2, \ldots\} \cup \{(k-1)/2k, (k-1)/2k + k, (k-1)/2k + 3k, \ldots\}$$

の一つでなければならない．

定理２を可能にしているのは (1a) に加え，(2b) 元の系が積分可能なら得られた Gauss の超幾何方程式が「初等的」に解けるという主張 (Morales and Ramis, 1997, in preparation)，及び (2c) 木村俊房 (1969) による Gauss の超幾何方程式が「初等的」に解けるための必要十分条件，である．現時点では (2b) の証明は preprint の形ですら公表されていない．本論文の第一の結果は (2b) の初等的かつ独立な証明を与えたことである．