K01a　変数分離可能な２次元同次多項式ポテンシャル系の完全分類

吉田春夫 (国立天文台)

積分可能な Hamilton 系のなかで最も重要なクラスは変数分離可能系である．変数分離可能性は
$H = (1/2)(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y)$
の場合，ハミルトニアンと独立な運動量について２次の第一積分が存在することと同値であり，かつポテンシャル $V(x,y)$ が非自明な Darboux の方程式
$(V_{yy} - V_{xx})(-2axy - b'y - bx + c) + 2V_{xy}(ay^2 - ax^2 + by - b'x + c') + V_x(6ay + 3b) + V_y(-6ax - 3b') = 0$
を満足することとも同値であることが知られている．(I.Marshall and S.Wojciechowski, 1988)

今，ポテンシャルが同次多項式であると仮定すると，Darboux の方程式の左辺は３つの異なる次数の同次多項式の和となり，各同次多項式が恒等的に 0 となる必要がある．つまり３つの方程式
(1) $[-2xy(V_{yy} - V_{xx}) + 2(y^2 - x^2)V_{xy} + 6yV_x - 6xV_y]a = 0$
(2) $[-x(V_{yy} - V_{xx}) + 2yV_{xy} + 3V_x]b + [-y(V_{yy} - V_{xx}) - 2xV_{xy} - 3V_y]b' = 0$
(3) $(V_{yy} - V_{xx})c + 2V_{xy}c' = 0$
が独立に満足されなければならない．これから $(a, b, b', c, c') \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ となるような解が存在する条件はポテンシャル $V(x,y)$ についての線形偏微分方程式を導き，その解から次の結論が得られる．

定理：変数分離可能な k 次の同次多項式ポテンシャルはつぎの３種類，およびそれらを座標回転して得られるものに限られる．
(1) $V = (x^2 + y^2)^{k/2}$,（k は偶数）：極座標で変数分離可能
(2) $V = \sum_{m=0}^{[k/2]} 2^{k-2m}(k-m)!/m!(k-2m)!\, x^{2m}y^{k-2m}$：放物線座標で変数分離可能
(3) $V = Ax^k + By^k$：直交座標で変数分離可能