K04a　普遍 (universal) ケプラー方程式の高速解法

福島登志夫 (国立天文台 天文情報公開センター)

ケプラー方程式の解法について、従来の方法より格段に（3 ないし 4 倍）高速な手法の開発を行ってきた。楕円軌道の標準型については Fukushima (1997a, Cele. Mech. Dyn. Astr., 66, 309) に、拡張型は Fukushima (1996, Astron. J., 112, 2858) に、また双曲線軌道の標準型は Fukushima (1997b, CMDA, 68, 121) に、拡張型は Fukushima (1997c, AJ, 113, 1920) に、さらに準放物線軌道のためのガウス型は Fukushima (1998, CMDA, 70, 115) に、各々発表済みである。一連の研究の締めくくりとして、楕円・準放物線・双曲線のすべての軌道を統一的に扱う普遍ケプラー方程式の高速解法を開発したので報告する。普遍ケプラー方程式は、単にすべての場合を統一的に扱うというだけでなく、KS 変換のような正則化を導入するときに標準的に用いられるという意味で、実用上も大きな意味を持っている。さて、普遍ケプラー方程式の標準形は Stiefel and Schefele (1971, Springer-Verlag, Berlin) や Battin (1987, AIAA, New York) に与えられているが、いずれも次元を持った形で記述されているため、効率的な数値解法を開発するには適さない。そこで、これらを無次元化した普遍ケプラー方程式

$$G+\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)U_3(G;\lambda)=L,\quad \left(\text{ただし}\ \ \lambda\equiv\frac{1-e}{1+e},\ \ U_3(G;\lambda)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^j G^{2j+3}}{(2j+3)!},\ \ L\equiv\sqrt{\frac{\mu(1+e)}{q^3}}(t-T)\right)$$

を導入する。ここに、G は普遍離心近点角、L は普遍平均近点角、λ は Brunnow の離心パラメータ、U_3 は Battin の 3 次普遍関数である。G と通常の離心近点角との関係は $G=E/\sqrt{\lambda}=F/\sqrt{-\lambda}$ となる。解法の骨子は「(1) 解が小さいとき逆級数展開で与え、(2) 準放物線軌道とは言いがたいとき楕円もしくは双曲線の形に変換して解き、(3) 準放物線軌道のとき (3a) 二分法によって解区間を十分小さく囲い込み、(3b) 近似 3 次方程式を近似的に解いて粗い解を求め、(3c) 普遍関数の加法定理とテーラー展開を活用してニュートン法で解を改良する」である。この方法により、楕円軌道や双曲線軌道のときとあまり遜色ない計算時間で普遍ケプラー方程式が解ける。