K04a　衛星軌道の一般相対論的運動方程式

○福島登志夫 (国立天文台 天文情報公開センター)

衛星の軌道運動に関して、実際的な一般相対論的運動方程式を、ポスト・ニュートン近似の範囲で求めることを考える。既存の扱いは、DSX 形式（Damour *et al.*, Phys. Rev. D, 1994) に代表されるように、計量テンソルの変換理論に基づくものが主である。しかし、実際の軌道運動モデルには、しばしば非保存力や非重力効果が現れる。そこで、背景座標系 $(t, \mathbf{x})$ における軌道加速度 $\mathbf{a} \equiv \mathrm{d}^2\mathbf{x}/\mathrm{dt}^2$ の陽的表現 $\mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ が得られている場合に、任意の軌道運動 $\mathbf{x}_E(t)$ を行う天体（たとえば地球）E に付随する幾何学的非回転４次元座標系 $(T, \mathbf{X})$ における軌道加速度 $\mathbf{A} \equiv \mathrm{d}^2\mathbf{X}/\mathrm{dT}^2$ の陽的表現 $\mathbf{A}(T, \mathbf{X}, \mathbf{V})$ を、計量テンソルの変換理論を用いずに求めよう。ただし $\mathbf{V} \equiv \mathrm{d}\mathbf{X}/\mathrm{dT}$ である。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{A}$ では定義座標系が異なるため、単に $\mathbf{A} = \mathbf{a}_G - \mathbf{a}^*_E$ とは変換できない。ここに、添え字 G は引数 $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ が $(t_E, \mathbf{x}_E + \mathbf{X}, \mathbf{v}_E + \mathbf{V})$ のときを、添え字 E は引数が $(t_E, \mathbf{x}_E, \mathbf{v}_E)$ のときを、また、$*$ は無限大となる項（すなわち天体 E 自身の寄与）を除くことを意味する。(N) はニュートン近似を、また Δ はポスト・ニュートン近似の補正を表すとして、$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(N)} + \Delta\mathbf{A}$ などと分けると、求める表現は以下のようになる。

$$\mathbf{A}^{(N)} = \mathbf{a}_G^{(N)} - \mathbf{a}_E^{*(N)}, \quad c^2\Delta\mathbf{A} = c^2\left[\Delta\mathbf{a}_G - \Delta\mathbf{a}^*_E\right] + \left[(\gamma+2)\phi^*_E + \mathbf{v}_E^2 + 2\mathbf{a}_E^{*(N)}\cdot\mathbf{X} + 2\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{V}\right]\mathbf{A}^{(N)}$$

$$+ (\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{X})\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial t}\right)_G + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}_E^{*(N)}}{\mathrm{dt}}\right)\cdot\mathbf{X} + 2\mathbf{a}_E^{*(N)}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{v}_E\cdot\mathbf{A}^{(N)} + (\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{X})\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial\mathbf{x}}\right)_G - \left(\mathbf{a}_E^{*(N)}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{v}_E\cdot\mathbf{V}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial\mathbf{v}}\right)_G\right]\mathbf{v}_E$$

$$+ \left[\mathbf{a}_E^{*(N)}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{v}_E\cdot\mathbf{V} + \left(\frac{\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{X}}{2}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial\mathbf{v}}\right)_G\right]\mathbf{a}_E^{*(N)} - \left(\frac{\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{X}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}_E^{*(N)}}{\mathrm{dt}}\right) + \gamma\left[\frac{\mathrm{d}^2\phi^*_E}{\mathrm{dt}^2} - \phi^*_E\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial\mathbf{x}}\right)_G - \left(\frac{\mathrm{d}\phi^*_E}{\mathrm{dt}}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial\mathbf{v}}\right)_G\right]\mathbf{X}$$

$$+ \left[(2\gamma+1)\left(\frac{\mathrm{d}\phi^*_E}{\mathrm{dt}}\right) + \mathbf{v}_E\cdot\mathbf{a}_E^{*(N)} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}_E^{*(N)}}{\mathrm{dt}}\right)\cdot\mathbf{X} + 2\mathbf{a}_E^{*(N)}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{v}_E\cdot\mathbf{A}^{(N)} - \left\{(\gamma+1)\phi^*_E + \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} + \mathbf{a}_E^{*(N)}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{v}_E\cdot\mathbf{V}\right\}\left(\frac{\partial\mathbf{a}^{(N)}}{\partial\mathbf{v}}\right)_G\right]\mathbf{V}$$