

K05c カウエル法の軌道積分誤差の推定公式

福島登志夫 (国立天文台 天文情報公開センター)

百億年規模の惑星軌道シミュレーションに代表される「力学系の超長期数値積分」においては、丸めと打ち切り双方の積分誤差の蓄積のため、倍精度計算環境では意味のある結果を得ることができない (Fukushima 2001, AJ, 121, 1768)。これに対する究極の解決法は、4倍精度もしくは倍長倍精度 (福島 2002 天文学会春) などの高精度計算環境への移行である。そう決心すれば、ステップ数 N の2乗で打ち切り誤差が増大するカウエル法など従来型の数値積分法でも十分有効である。しかし、次数や刻み幅など積分実行時のパラメータをどう指定すればよいかは、あまりわかっていない。そこで、ケプラー運動におけるカウエル法の最大積分誤差の推定公式を解析的に求めた。

$$\frac{\max |\Delta \mathbf{r}|}{a} \approx \epsilon N^{1.5} + \frac{3}{2} \gamma_q Z_q(e) H^{q+2} N^2 \quad \text{ただし} \quad H < H_p \equiv 2 \left/ \sqrt{\sum_{k=0}^p \gamma_k 2^k} \right.$$

ここに a は軌道長半径、 ϵ はマシン・エプシロン、 $q \equiv 2[p/2] + 2$ 、 p と γ_k はカウエル法の次数と後退差分展開係数、 $Z_q(e)$ は離心率 e のときの q 次の打ち切り誤差増幅係数、 H と H_p は1ステップ当りの平均近点角の増加量と次数が p のときの最大安定値である。 γ_k と $Z_q(e)$ の解析的表現は省く。丸め誤差の定量的表現と H_p の評価が、従来なかった新しい成果である。4倍精度計算による数値実験により、上記公式が概ね正しいことを確認した。この推定公式によれば、 $e = 0.2$ という水星並みの楕円軌道の場合でも、倍長倍精度環境 (仮数 106 ビット) において $p = 20$ のカウエル予測子公式で $H = 2\pi/1024$ ととれば十分安定であり、その場合 10^{11} 周期後 (これは太陽・月・9 惑星を約百億年計算することに相当する) でも経度方向の誤差は 0.01 秒角程度に抑えられる。