K03a　スケール変換による効率的な軌道シミュレーション

○福島登志夫 (国立天文台 天文情報公開センター)

惑星や衛星の軌道など準ケプラー運動に対し、通常の運動方程式 $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{dt} = -(\mu/r^3)\vec{r} + \vec{a}$ に加えて、ケプラー積分 $K \equiv T + U$ （ただし $T \equiv \vec{v}^2/2$、$U \equiv -\mu/r$）の時間発展方程式 $\mathrm{d}K/\mathrm{dt} = \vec{v} \cdot \vec{a}$ も同時に数値積分することを考える。この随伴的積分に必要な摂動加速度 $\vec{a}$ は運動方程式で計算済みなので、計算コストの増加は非常に小さい。

さて、普通は、運動方程式の積分結果より得られる位置・速度から解析的に求めた K を、別に数値積分して得られた K と比較して軌道シミュレーションの誤差判定に使うが、ここでは、より積極的に両者が一致するように、積分された位置・速度をスケール変換 $(\vec{r}, \vec{v}) \to (s\vec{r}, s\vec{v})$ により補正することを考える。未知パラメータ s は3次方程式 $Ts^3 - Ks + U = 0$ を解いて求める必要があるが、よい初期推定値 $s = 1$ が自明なので、実際は１～２回のニュートン反復で十分である。多体問題の場合は天体毎に K を積分し、天体毎に別の s を決定すればよい。

このスケール変換を数値積分のステップ毎に行うと、通常、時間の２次で成長する位置誤差の主要項の大きさが著しく減少する。主要項の大きさは、摂動の種類によって 5/4 ないし 5/2 次で減少するため、弱い摂動の場合、時間の１次で成長する副次項（これ自体の大きさはスケール変換でほとんど変化しない）が、主要項を凌駕し、あたかも位置誤差が時間の１次で成長するかのように見える。もちろん時間が十分たてば２次項が卓越するが、実用上はそこまで長期間の積分を必要としない場合も多い。留意すべきは、主要項の減少が積分法や摂動の種類、天体の数、刻み幅の可変性等によらない点である。例として太陽＋９惑星を百万年間、アダムス法で軌道計算した場合、（最大の積分誤差をもたらす）水星の位置誤差は、事実上、時間の１次で成長するかのように見える。