# L12a ケプラー方程式が不要な軌道要素変化法

○福島登志夫 (国立天文台)

軌道要素変化法は惑星や衛星の軌道などを扱う摂動 2 体問題の代表的解法である。古来、ラグランジュやガウスの惑星方程式など多くの手法が提案されてきたが、いずれの場合もケプラー方程式を解くことが必須である。同方程式は数値的に解くしか手段がないため、結果として軌道要素変化法は複雑となっている。そこで平均近点角 $M$ 及び時間 $t$ の代わりに離心近点角 $E$ 及び Stiefel & Scheifele(1971) の時間要素 $\tau$ を用いることにより、ケプラー方程式を全く用いない軌道要素変化法を考案したので報告する。新しい方式での独立変数は $E$、従属変数は $C \equiv (a, e, I, \Omega, \omega)$ の軌道 5 要素及び $\tau$ である。位置・速度ベクトル $(\vec{x}, \vec{v})$ と $(E, C)$ との変換は 1 対 1 かつ陽的であり、$t$ との関係式は平均運動 $n$ を用いて $t = \tau - (e/n) \sin E$ となる。新方式の鍵となる要素変化方程式は $dC/dE = (r/a)F_C/[n(1+\alpha)]$ 及び $d\tau/dE = (1+\beta)/[n(1+\alpha)]$ と書ける。ここに $F_C = dC/dt$ で $\alpha$ 及び $\beta$ は摂動加速度 $\vec{a}$ を用いて $\alpha \equiv (r/\mu e) [(\cos E)(\vec{x} \cdot \vec{a}) - \{(2 - e \cos E) \sin E/n\} (\vec{v} \cdot \vec{a})]$ 及び $\beta \equiv (r/\mu) [(\vec{x} \cdot \vec{a}) + (2e \sin E/n)(\vec{v} \cdot \vec{a})]$ と表される。新しい要素変化方程式の右辺は全て、(1) 無摂動時に 0 もしくは定数となり、(2)$C$、$\tau$、$\sin E$ 及び $\cos E$ の陽的な関数であり、従ってケプラー方程式を解く必要がなく、(3)$E$ 自体を陽に含まないため混合周期項が現れず、(4)$1/r$ の因子を含まないため近接遭遇時でも摂動項の大きさが大きくならない。変化方程式を数値的に積分する場合、適当な整数 $N$ を用いて $\Delta E = 2\pi/N$ と設定することにより $\sin E$ 及び $\cos E$ の値をあらかじめ離散化かつ固定化できるため、変化方程式中の三角関数の引数の情報落ちに起因する丸め誤差を軽減できる。$e \sim 0$ もしくは $I \sim 0$ のときの見かけ上の困難を避けるには、$E$ と $C$ の代わりに近点経度 $\varpi \equiv \Omega + \omega$ により定義される離心経度 $D \equiv E + \varpi$ と非特異な軌道 5 要素の一例 $(a, e \cos \varpi, e \sin \varpi, \sin I \sin \Omega, -\sin I \cos \Omega)$ を用いればよい。