L16a　オイラー・パラメータによる自転運動の正則かつ効率的な数値積分スキーム

○福島登志夫 (国立天文台)

自転運動は軌道運動と並んで天体の二大運動であり、古くからの研究対象であるため軌道運動と同じく十分研究されていると思いがちであるが、必ずしもそうではない。特に数値シミュレーションに関しては重力N体問題に代表される軌道運動ほど活発な研究は行われていない。理由の一つに自転運動に関してはニュートンの運動方程式のように簡潔で正則な微分方程式系が確立されていないことが挙げられよう。有名なオイラーの剛体運動方程式は3-1-3オイラー角を座標として採用しているため球座標に伴う特異点を避けることができず、不適切な座標系の選択や強いトルク下の自転運動などで数値不安定が起きたり著しい計算精度劣化を引き起こす。Tait-Bryan角や1-2-3オイラー角など他の3次元座標を採用しても事態は改善されず、単位四元数と等価であるオイラー・パラメータ$q \equiv (q_0, q_1, q_2, q_3)$などの過剰変数系を座標として用いて初めて特異点が解消される。実際qを座標として採用した場合、回転天体に付随する動座標系の基底表現が三角関数などの特殊関数を使わずに$\vec{e}_A = \left(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, 2\left(q_0 q_3 + q_1 q_2\right), 2\left(q_1 q_3 - q_0 q_2\right)\right)^{\mathrm{T}}$, $\vec{e}_B = \left(2\left(q_1 q_2 - q_0 q_3\right), q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2, 2\left(q_0 q_1 + q_2 q_3\right)\right)^{\mathrm{T}}$, $\vec{e}_C = \left(2\left(q_0 q_2 + q_1 q_3\right), 2\left(q_2 q_3 - q_0 q_1\right), q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2\right)^{\mathrm{T}}$と簡潔になるばかりでなく、$\mathrm{d}q_0/\mathrm{dt} = -\left(q_1\omega_A + q_2\omega_B + q_3\omega_C\right)/2$, $\mathrm{d}q_1/\mathrm{dt} = \left(q_0\omega_A - q_3\omega_B + q_2\omega_C\right)/2$, $\mathrm{d}q_2/\mathrm{dt} = \left(q_3\omega_A + q_0\omega_B - q_1\omega_C\right)/2$, $\mathrm{d}q_3/\mathrm{dt} = \left(-q_2\omega_A + q_1\omega_B + q_0\omega_C\right)/2$などと運動方程式も正則化される。が、残念ながら過剰変数系であるがゆえに別種の数値不安定性あるいは計算精度の劣化が誘起されてしまう。この閉塞的状況を打開するために、摂動2体問題の数値積分で威力を発揮した多様体補正法を応用することにより、数値積分の各ステップで正規化条件$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$を満たすようにスケール変換$q_j \rightarrow q_j/\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$を施すことで、見掛け上の特異点を回避し、かつ数値的に安定なシミュレーション手法を確立することができたので報告する。