

U03c **A finitely complete category on universes of Boolean-valued quantum sets**

中山薫二 (龍谷大)

Döring & Isham (e.g., 2008) は、量子宇宙論・量子重力理論での必要性から、トポスと圏論的論理に基礎を置く、実在論的な量子論の構築を提唱しており、それに適したトポスの例として、ヒルベルト空間上の有界作用素の可換フォン・ノイマン代数の圏  $\mathcal{V}$  上の前層トポス  $\text{Set}^{\mathcal{V}^{\text{op}}}$  を挙げている。さらに、Heunen et al. (2007) は、それを可換  $C^*$  代数上の前層トポスにまで一般化している。一方筆者は最近、代替案として、量子集合論での集合の universe(s) の集まりを基礎にしたトポスまたは類似の構造の構築を試みている。本ポスターはそれについての報告である。

量子集合論とは、論理学者の竹内外史 (1981) によって始められた、量子論理に基づく集合論で、公理的集合論の分野で知られるブール値集合論の一般化である。そこでは集合が、量子論理束 (ヒルベルト空間上の完備な射影子束) 内に値をとる特性関数として定義される。また、射影子束が生成するフォン・ノイマン代数は文脈と解釈され、それによって定義される物理量についての任意の量子命題は、量子集合論内での実数論の命題に翻訳される。注目すべきは、文脈として一般に非可換フォン・ノイマン代数が許容され、非可換な物理量の間での quantum correlation を自然に導出できることであり (Ozawa 2007)、この点で量子集合論は、可換代数に限定された上記のトポス理論よりも強い表現力を持つ。したがって、これら量子集合の各 universe をトポス的な圏構造で統合できれば、Döring & Isham の思想を実現する、前層トポス以上に強力な道具が得られると期待される。

とはいえ当面は、先ず第一歩として、可換代数に話を限る。すなわち、ヒルベルト空間上の可換フォン・ノイマン代数を生成する射影子束 (したがって完備ブール束) による量子集合の universes 全体の上での構築を目標とする。今のところ、ある圏構造について、それが有限完備性 (トポスの定義の一部) を満たすことが証明できているので、ポスターではその圏の定義と、証明の概略を紹介する。