U30c　Topologies on Quantum Topos Induced by Quantization

○中山薫二 (龍谷大学)

Döring & Isham（2009 等）によるトポス理論的量子論は、量子宇宙論や量子重力理論の整合的な基礎を与えること目指し、観測概念に依存しない形式に量子論を書き直す試みである。その数学的枠組みは、主に、Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の可換 von Neumann 代数からなる圏 $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ 上の前層トポス $\mathbf{Set}^{\mathbf{V}(\mathcal{H})^{\mathrm{op}}}$ が用いられる。この理論は、Hilbert 空間を出発点とする公理的量子論や、C^* 代数上に構成する代数的量子論のように、始めから量子論の一般論を展開するものである。したがって、それ自体は、古典物理系との対応を必要としていない。

本ポスターでは、古典物理系の量子化が、量子トポスに誘導する構造を考察する。古典系は一般的に、古典的オブザーバブルの Lie 代数 $\mathcal{O}$ で与える。量子化は、各 $a \in \mathcal{O}$ に対し、対応する $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\hat{a}$ によって得られるユニタリ作用素 $e^{i\hat{a}}$ を与える写像 υ である。そこで、$\mathcal{O}$ の Lie 可換な部分集合をオブジェクトとする様々な圏 $\mathbf{C}$ を考えると、量子化写像 υ は、それらから $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ への自然な関手 ϕ を誘導する。各 $\mathbf{C}$ はそれぞれに、ϕ を通じ、量子トポス上に Lawvere-Tierney 位相を（したがって $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ 上の Grothendieck 位相を）誘導するが、このとき以下の事実が証明される：『$\mathcal{O}$ の Lie 可換な部分代数をオブジェクトとする圏 $\mathbf{A}$ が存在し、それを部分圏として含むすべての $\mathbf{C}$ は同一の位相 J を量子トポス上に誘導する。』この J は、$\mathbf{C}$ が誘導しうる Grothendieck 位相として最小のものであり、したがって、$(\mathcal{O}, \upsilon)$ を特徴付ける $\mathbf{Set}^{\mathbf{V}(\mathcal{H})^{\mathrm{op}}}$ 内の構造であると考えられる。

トポス理論的量子論は、必ずしも Hilbert 空間に依存しないトポス上で定義される可能性もある。その際の「量子化」概念の拡張には、上記のような考え方が役立つかもしれないと思っている。