L11a 扁長楕円体調和関数で展開された重力場の高速高精度計算

○福島登志夫 (国立天文台)

Eros のような細長い形状を持つ小天体の重力ポテンシャルは扁長楕円体調和関数により効率的に展開される。

$$V(v,\vartheta,\lambda) \approx \frac{GM}{a}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{Q_{nm}(y)}{Q_{nm}(y_0)}P_{nm}(\cos\vartheta)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right), \quad \left(y \equiv \frac{v}{E},\ \ y_0 \equiv \frac{a}{E}\right)$$

ここに v は共焦点扁長楕円体の半長軸、ϑ は化成余緯度、λ は経度、$E \equiv ae$ は共焦点距離、a および e は基準扁長楕円体の半長軸と離心率、P_{nm} および Q_{nm} は第１種および第２種のルジャンドル陪関数である。三角関数の値はFFT 等により高速高精度計算が可能であり、P_{nm} の関数値および微分値の高速高精度計算は指数拡張実数の導入により実現した (Fukushima, 2012a, J. Geodesy, 86, 271; ibid., 2012b, J. Geodesy, 86, 1019)。残る問題は Q_{nm} の関数値および微分値の計算である。Q_{nm} の引数は扁平楕円体 (Fukushima, 2013, J. Geodesy, 87, 303) では純虚数だが扁長楕円体では１より大きな実数となる。$Q_{nm} = [(-1)^m (n+m)!/(2n+1)!!]y^{n-m+1}(y^2-1)^{m/2}F_{nm}$ と変換すると F_{nm} は $\tau \equiv 1/y^2 < 1$ を引数とする超幾何関数で表現されるが、これは一般に収束が遅いので漸化式

$$F_{nm} = F_{n+1,m} - a_{nm}\tau F_{n+2,m}, \quad a_{nm} \equiv (n-m+2)(n+m+2)/((2n+3)(2n+5)), \quad (n = N-2, N-3, \cdots, m)$$

$$F_{nm} = d_{nm}F_{n,m-1} + (1-d_{nm})(1-\tau)F_{n,m-2}, \quad d_{nm} \equiv 2(m-1)/(n+m), \quad (n = N, N-1; m = 2, 3, \cdots, n)$$

により計算するのがよい。漸化式に必要な出発値 F_{N0}, F_{N1}, $F_{N-1,0}$, $F_{N-1,1}$ は、m が小さい時に急速に収束する別の超幾何関数表現で計算できる。なお Q_{nm} の微分値は Q_{nm} の関数値を含む別の漸化式により計算可能である。