J128a　ミニマックス多項式近似による一般化 Fermi-Dirac 積分の解析的計算

福島登志夫 (国立天文台)

一般化 Fermi-Dirac 積分 $F_k(\eta,\beta)$ は天体物理学および半導体物理学で多用される特殊関数である。η が打切り Sommerfeld 展開 (Fukushima, 2014a, Appl. Math. Comp., 234, 417) の適用最小値 η_S 以下のとき、β がある程度小さい場合の同積分の高速計算法を開発した (Fukushima, 2014c, Appl. Math. Comp., submitted) ので報告する。一般化因子のミニマックス多項式近似 $\sqrt{1+x/2} \approx \sum_{j=0}^{J} g_j x^j$ により同積分は以下のように近似される。

$$F_k(\eta,\beta) \equiv \int_0^\infty \frac{t^k\sqrt{1+(\beta/2)t}}{\exp(t-\eta)+1}dt \approx \sum_{j=0}^{J} g_j F_{k+j}(\eta)\beta^j. \quad \left(\eta \equiv \frac{\mu}{k_B T},\ t \equiv \frac{\varepsilon}{k_B T},\ \beta \equiv \frac{k_B T}{mc^2}\right)$$

Fermi-Dirac 積分 $F_k(\eta) \equiv F_k(\eta,0)$ の計算には、我々が最近開発したミニマックス有理関数近似 (Fukushima, 2014b, Appl. Math. Comp., revised) を用いる。$\eta < \eta_S$ の場合、物理学的に重要な k の値 $-1/2$, $1/2$, $3/2$, $5/2$ に対し、$J=8$ とすると β が 0.21 より小さければ 8 桁精度が、$J=7$ とすると β が 0.004 より小さければ 15 桁精度が各々保証される。前者は核子について超新星爆発まで、電子・陽電子について Ne 燃焼過程まで、また後者は太陽を含む通常の恒星内部での計算に十分な温度範囲の β 値をカバーしている。近似計算は非常に高速で、被積分関数の評価回数に換算して高々0.9 ないし 1.4 回である。$-1/2$, $1/2$, $3/2$, $5/2$ など整数だけ異なる k に対しては同じ $F_{k+j}(\eta)$ が流用できるため、$F_k(\eta,\beta)$ の同時計算ではさらに約 2-4 倍の加速が期待できる。結局、β が上記の値より小さい場合、従来の数値積分法に比して 70-450 倍の高速化が実現された。プレプリント及び Fortran プログラム等は `https://www.researchgate.net/profile/Toshio_Fukushima/` から無料で入手可能である。