P140b　エネルギー保存を保証する自己重力流体方程式の差分法

花輪知幸 (千葉大)

星形成でも系の全エネルギーは重要な物理量である。このため多くのシミュレーションでは、質量やエネルギーが物理的なプロセスだけで変化するよう、保存形式の流体力学方程式が採用されている。しかし単位体積あたりの重力エネルギーの解放率 $(\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g})$ が源泉項となるため、一般には、打ち切り誤差によるエネルギー変化が残る。このポスターでは、この打ち切り誤差を陽的に消去する時間 2 次精度の方法を紹介する。

本ポスターの方法で重力は、各数値セルの表面で面に垂直な成分 $(\boldsymbol{g}_\mathrm{n})$ と、面内の成分 $(\boldsymbol{g}_\mathrm{t})$ を持つとする。前者 $\boldsymbol{g}_n$ は、Poisson 方程式 $(\int\boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{S}=-4\pi G\int\rho dV)$ を満たす。ここで G は重力定数、$d\boldsymbol{S}$ と dV は数値セルの表面積分と体積積分を表す。また隣接するセルの中心を結ぶベクトルのセル表面に垂直な成分 $\Delta\boldsymbol{s}_\mathrm{n}$ と $\boldsymbol{g}_\mathrm{n}$ の内積とポテンシャル差と一致させる $(\Delta\phi=-\boldsymbol{g}_\mathrm{n}\cdot\Delta\boldsymbol{s}_\mathrm{n})$。セル表面内の成分 $\boldsymbol{g}_t$ は、重力ポテンシャルの存在 $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}=0$ と作用反作用の法則 $[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}-|\boldsymbol{g}|^2/2)=4\pi G\rho\boldsymbol{g}]$ により一意に定められるが、数値計算に陽には現れないので求める必要はない。重力エネルギー解放率は、$\boldsymbol{g}_n$ とセル表面を通過する質量流束 $\rho\boldsymbol{v}$ の積と表される。質量保存の方程式を解き、密度分布を更新させたのち、その時刻で求めた重力も使って速度やエネルギーを更新させれば、重力エネルギーを含む全エネルギーが保存する。

一様格子の場合、2 次の中心差分により Poisson 方程式を解けば、上記の方法が適用できる。Adaptive Mesh Refinement 法 (AMR) で用いられる計算領域の一部で、セルを 1/8 に分割する格子でも、上記の条件に合うよう Poisson 方程式を差分化することができる。求められた重力は解像度が変化する場所で 1 次精度であるが、エネルギー保存は厳密に成り立つ。重力が外場として与えられる場合にも本発表の方法は適用できる。